د . حسن بدور



الطبيعة والفلسفة في تاريخ الرياضيات



الطبيعة والفلسفة

في تاريخ الرياضيات

د حسن بدور

الطبيعة والفلسفة

في تاريخ الرياضيات

الطبيعة والفلسفة في تاريخ الرياضيات

الدكتور حسن بدور
أستاذ في قسم الرياضيات :
كلية العلوم- جامعة تشرين
Email: hassanbaddour@sgmail.com

الطبعة الأولى : 2013
عدد النسخ : ١٠٠٠+١٢٠
قياس الورق: Executive: 10.5×7.35 # B5:21.5×12.5
التقديم للطباعة: ٢٠١٣/6/١٠

تصميم الغلاف: حسان خديجة

ISBN: 978 9933 456 99 3

دار المرساة للطباعة والنشر والتوزيع
سورية ـ اللاذقية هاتف: ٤٤٥٤٦٠

الفهـــــرس

المقدمة

كان الإنسان القديم عاجزاً عن فهم ظواهر الطبيعة، فعاش خائفاً منها تهيمن عليه الأساطير والسحر. إلا أنه بدأ في فترة ما، وأحفاده من بعده، بالتعامل مع هذه الظواهر لفهمها والسيطرة عليها ومن ثم الاستمتاع بها. وليس غريبا أن تكون أولى الوسائل التي استخدمها ، في سبيل ذلك ، هي الرياضيات. وإذا كان القانون البيولوجي: "البقاء للأصلح" صحيحاً فيمكن القول إن صمود البشرية في صراعها من أجل البقاء ليس مستقلاً عن تطور المفاهيم الرياضية في ذهن الإنسان ، بحيث غدت الرياضيات، تدريجياً، أداة هامة للجنس البشري متصلة برخائه ضمن سير البشرية البطيء والمؤلم منذ عهود الوحشية إلى العهود الحديثة.

بحسب المعلومات التي وردت إلينا فإن الرياضيات بدأت رحلتها المتعثرة الأولى قبل حوالي خمسين قرناً ، في حضارات الشرق ، وخصوصاً البابلية والمصرية. فكانت بالنسبة لهم أداة، لاغنى عنها ، في حياتهم اليومية لمعرفة الفصول ومواسم الحصاد ولعد قطعانهم والمتاجرة بمنتجاتهم ، بالإضافة إلى استخدامها في بناء المعابد والهياكل وصوامع الحبوب وغيرهأ...

لقد كانت لحظة حاسمة في تاريخ الجنس البشري عندما استطاع الإنسان السيطرة على الطبيعة من بعيد. وربما حدث ذلك لأول مرة في القرن السابع ق م عندما استطاع تالس حساب بعد سفينة ، في عمق البحر ، عن الشاطئ . وتلا ذلك الانتصارات الرائعة للحضارات ، في ميدان العلوم والرياضيات ، بدءاً من الحضارة اليونانية وانتهاء بالحضارة الأوروبية. وقد تجلى ذلك بوضوح في علم الفيزياء والفلك والفلسفة المتعلقة بطبيعة الكون . وإذا كان بطليموس، ومن بعده كوبرنيك وكبلر، قد لخصوا الفضاء الفيزيائي وحركات الكواكب بحدود هندسية فإن غاليليو، ومن بعده نيوتن ، قد وسعا تطبيقات الهندسة إلى الفضاء اللانهائي من الكواكب . وأخيراً ومن خلال الهندسة غير الاقليدية وضع آينشتاين فكرته عن الفضاء رباعي الأبعاد بصورة رياضية. وبذلك أصبحت الجاذبية والمادة وكذلك الفضاء جزءاً من التركيب الهندسي للكون. وترافق كل ذلك مع ظهور نظريات فلسفية مختلفة بحسب اختلاف اتجاهاتها المادية أو اللاهوتية ، حيث كان التأثير متبادلاً بين الفلسفة وبقية العلوم وخصوصاً الرياضيات.

وقد تغير الأمر، كثيراً ، في العصور الحديثة ، فلم تعد علاقة الرياضيات مقتصرة على الفلسفة فقط بل غدت ذات علاقة مع الفيزياء النووية وعلم الاقتصاد وعلم الإجتماع وكل ما له علاقة

بالفن والجمال كالتأليف الموسيقي ورسم المنظور الفني وألعاب التسلية - وباختصار فقد أصبح لها علاقة بكل شيء.

وفي جميع الأحوال كانت العلاقة عضوية بين تاريخ الرياضيات وفلسفتها، وكانت مهمة فلسفة الرياضيات محاولة إعادة بناء المعارف الرياضية المتراكمة والمتبعثرة وترتيبها،عبر العصور. فبدون الفلسفة، إذاً، سيكون تاريخ الرياضيات وأصولها سرداً جافاً لما يطفو على السطح من تتابع للحوادث دون الغوص في الأعماق وبعيداً عن الدوافع الإنسانية الكامنة. يكفي أن نلاحظ مثلاً أنه عند محاولة أي انتقال، من ماهو نهائي إلى ماهو لانهائي، فلا بد من تدخل الفلسفة.

هذا الكتاب هو محاولة لعرض تاريخ الرياضيات من وجهتي النظر العلمية والفلسفية، منذ بداياتها ، من خلال عرض الشخصيات الرياضية الشهيرة ، عبر التسلسل الزمني ، للفترات التي عاشوا فيها. والغاية من ذلك هي أولاً : الحفاظ على ترتيب الأفكار وتنظيم ترابطها مع بعضها ، وفقاً لظهورها ، وثانياً: ليسهل على القارئ متابعة الأحداث التاريخية بحسب هذا التسلسل الزمني الدقيق . بالإضافة إلى ذلك فقد عرضت المواضيع في فقرات قصيرة تعطي فكرة كافية عنها ، دون الدخول في التفاصيل، توفيراً للوقت والجهد وهروباً من السرد الطويل ، الذي قد يكون مملاً في بعض الأحيان.

وقد وضع لتستفيد منه شريحة كبرى من القراء لما يحتويه من السهولة والسلاسة في طرح الأفكار، حتى العميقة منها. وهو سيكون مفيداً ، بشكل خاص ، لمدرسي مادة الرياضيات وكذلك للطلاب الجامعيين ، لما يتضمنه من النظريات والتطبيقات المعروفة ، ولكن بعد سرد لمحات تاريخية معبرة حول هذه النظريات وحول الرياضيين الذين قاموا باكتشافها.

وأخيراً بالرغم من هذا الترابط الزمني إلا أن القارئ يستطيع البدء بقراءة أي فصل ، يتعلق بحقبة تاريخية معينة ، دون الرجوع إلى ما سبقه ، إذا رغب بذلك ، وخصوصاً إذا كان الهدف هو الاطلاع على تاريخ الرياضيات وعلاقتها بالفلسفة والمعرفة، دون الدخول في تفاصيل بعض المسائل الاختصاصية المطروحة.

10/٦/٢٠١٣

المؤلف

I الفصل الأول

البدايات

ماهي الرياضيات؟ ❶

من الصعب تعريف مجمل النشاط الفكري والعلمي الذي قام به الرياضيون في القرون الأخيرة وصولاً إلى القرن الحالي. ولكن مجمل هذا النشاط ، الذي يسمى اليوم بالرياضيات، بني في الأصل على أساس مفهوم فكرة العدد والمقدار والشكل.

إن تعاريف الرياضيات القديمة مثل "هي علم الأعداد والمقادير" لم تعد صالحة أو معبرة عن هذه المادة، مع أنها توحي وتدل على أصول فروع الرياضيات المختلفة. فبإمكان المرء اقتفاء آثار الملاحظات القديمة حول مفاهيم العدد والكمية والشكل خلال الأيام الباكرة من تاريخ الإنسانية ومنذ الأيام الأولى للنشاط البشري . كما أن ملامح الرياضيات يمكن ملاحظتها في أشكال من الحياة قد تعود إلى ملايين السنين قبل ظهور الإنسان .

ولا بد أن الرياضيات تطورت في البداية كجزء من حياة الإنسان وحاجاته اليومية وكان لابد، يوماً ما، من ظهور الحساب للعد ، والهندسة للبناء . ثم تدريجياً ، ببطء أو بسرعة، أصبحت علاقة الرياضيات وثيقة في أي عصر من العصور بحاجات ذلك العصر الاجتماعية والاقتصادية.

في البداية كانت النظرة، إلى العدد والمقدار والشكل، تمثل وسيلة للتمييز بين الأشياء أكثر منها للتشابه . فقد كانت تستخدم، مثلا، للتفريق بين ذئب واحد وكثير منها، أو لملاحظة اختلاف حجمي الفيل والأرنب ، أو للتفريق بين الدائري كالقمر والمستقيم كجزع شجرة. من هذه المقارنات تم ، تدريجياً، استيعاب معنى التشابه، ومن هذا التشابه (أو المقارنة) في العدد والشكل ولد العلم وولدت الرياضيات.

الميل إلى العدد المجرد ❷

إن الاختلافات في الأشياء تؤدي في حالات كثيرة إلى التشابه في نقاط معينة ، فمثلاً عند التمييز بين ذئب واحد وقطيع ،بين طير واحد وسرب ، أو بين شجرة واحدة وغابة، فإننا ندل على وجود ذئب واحد وطير واحد وشجرة واحدة ، وهذا يوحي بشيء مشترك بينها وهو وحدانيتها، وبطريقة مشابهة يمكن النظر إلى المجموعات الأخرى ، نظرة تقابل (واحد إلى واحد). فالأزواج تمثل مثلاً، مقابلة اليدين بالقدمين، والعينين بالأذنين...وهكذا فإن إمكانية فصل العدد عن المعدود أدت إلى ظهور العدد المجرد ثم إلى مفهوم التجريد.

إن ملاحظة الصفة التجريدية التي تشترك بها المجموعات ، التي تدعى العدد، تمثل خطوة متقدمة نحو الرياضيات الحديثة. ومن المستبعد أن تكون أي قبيلة بعينها (أو أي شخص بعينه) قام بهذا الاكتشاف. بل المحتمل هو أن التنبه له والإحساس به جاءا تدريجياً عبر الأيام الغابرة من التطور الحضاري للإنسان القديم ، وكان قدمه بقدم اكتشاف الإنسان للنار الذي يعود ربما إلى ٣٠٠٠٠٠ سنة مضت.

ومما يدل أكثر على أن تطور مفهوم العدد جاء خلال عملية تدريجية وطويلة هو أن بعض اللغات كالعربية أو اليونانية تستخدم في قواعدها المفرد والمثنى والجمع ، حيث من الملاحظ أن معظم اللغات الحديثة تستخدم في قواعدها المفرد والجمع فقط ، ومن الواضح أن أجدادنا القدامى جداً استخدموا العد حتى ٢ فقط ، واعتبروا ما بعد ذلك "كثير".

إن أكثر ما يلفت النظر في اختلاف الإنسان عن الحيوان هو اللغة ، التي أدى تطورها بشكل أساسي إلى ظهور التفكير الرياضي المجرد . ومن المؤكد أن التعبير عن الأرقام بالإشارة سبق التعبير عنها بالكلمات ، لأن التعبير بواسطة علامات محفورة أسهل بكثير من استخدام أي رموز أخرى.

وقد كان من ضمن نتائج تطور اللغة هو تغطيتها للمقادير المجردة مثل العدد ، ويمكن أن نلاحظ ميل اللغة من المحدد إلى المجرد في قياسات كثيرة للطول في أيامنا هذه . ويصب في هذه الخانة قياس طول الحصان بواسطة الشبر مثلاً، أو استخدام أعضاء أخرى من الجسم للقياس مثل القدم والذراع.

وكان لابد من مرور آلاف السنين لكي يستطيع الإنسان فصل المفاهيم المجردة من الحالات المحددة والمتكررة،الأمر الذي يظهر صعوبة الأسس،حتى البدائية، للرياضيات.

الحاجة إلى اليد واللسان ❸

بعد أن أصبح مفهوم العدد حياً وموسعاً بما فيه الكفاية ظهر الشعور بالحاجة للتعبير عن خواص الأشياء بشكل ما، وربما ظهر ذلك في البداية بواسطة لغة رمزية فقط. فأصابع اليد مثلاً تدل على ١،٢ ... حتى ٥ أشياء. فمن خلال أصابع اليدين أمكن التمثيل حتى ١٠، ومن خلال أصابع اليدين والقدمين أمكن العد حتى ٢٠، وعندما لم تكن أعضاء الجسم كافية للتعبير عن مقادير أكثر عدداً ربما لجأ الإنسان لاستخدام كومات الحصى ، أو غيرها ، المؤلف كل منها من خمسة تماشياً مع عدد أصابع اليد. فمرد استخدام النظام العشري عند الإنسان ليس إلا نتيجة للصدفة البيولوجية، وهي أن معظمنا يولد بعشر أصابع في اليدين وعشر في القدمين. ولكن ومن وجهة النظر الرياضية، كان يبدو مناسباً، أن يكون للإنسان الأول أربع أصابع أو ست في اليد الواحدة.

لم تكن كومات الحصى مناسبة بما فيه الكفاية لحفظ المعلومات. لذلك استخدم الإنسان البدائي أحياناً تسجيلات الأرقام بواسطة قطع حفر تمثل علامات على العصي أو العظام. لم يبق من هذه القطع حتى يومنا هذا إلا القليل. لقد وجد مثلاً في تشيكوسلوفاكيا عظم لذئب صغير مقطع بشكل حفر إلى ٥٥ جزءاً. وهي مرتبة في سلسلتين: تضم الأولى٣٠ قطعاً والثانية ٢٥ قطعاً وكل من هاتين السلسلتين مكون من مجموعات عددية عناصرها

خمسة. كما وصلت إلينا إشارات مشابهة من الصين (تعود إلى ٣٠٠٠٠ سنة تقريباً) ومن زائير (تعود إلى ٢٠٠٠٠ سنة) . مثل هذا الاكتشاف الأثري يبين أن وجود فكرة العدد أقدم بكثير من التقدم التكنولوجي المتمثل باستخدام المعادن أو العجلات.

من هذه الإشارات والبقايا التي وجدت بشكل كتابات محفورة ، يلاحظ أن النظام الخماسي للعد هو من أقدم الأنظمة . ولكن بوجود اللغة لم يكن من الصعب الاقتراب من النظام العشري للعد الذي تفوق فيما بعد على أنظمة العد الأخرى. فنحن نلاحظ الآن وفي جميع لغات العالم أن العد يحوم في فلك العدد ١٠، فمثلاً نحن لا نعبر عن ١٣ بـِ ٣+٥+٥ وإنما بـِ ٣+١٠ . ولكن وبعد معركة شاقة وطويلة ، استخدم فيها الإنسان يده ولسانه وبقية حواسه ، توصل إلى النظام الحالي للعد المعروف بالنظام العشري.

الأصول ❹

إضافة إلى ما تقدم فهناك أسئلة كثيرة ، حول أصول الرياضيات وبداياتها، لم يتم الجواب عنها . من المفترض عادةً أن ظهور الرياضيات ارتبط بالإجابة عن حلول للحاجات العملية للإنسان. ولكن دراسة المستحاثات تفترض أصولاً أخرى. لقد افترض أن فن العد (الحساب) تقدم من خلال علاقته بآلهة الأديان القديمة . ففي الاحتفالات السلطوية توجب دعوة المشاركين للانتظام في صفوف من نوع معين. وربما كان العد مهماً لمثل هذه الحالة. وربما كان لهذا الوضع أهمية لتقسيم الأعداد إلى فردية وزوجية حيث يشير المفرد إلى المذكر والزوجي إلى المؤنث.

ولكن من غير المعروف أيهما كان أساساً لبداية الرياضيات الحساب أم الهندسة ؟ وذلك لأن بداية هذه المادة كانت قبل اختراع الكتابة. وخلال الستة آلاف سنة الأخيرة فقط وبعد جهد امتد ملايين السنين استطاع الإنسان أن يضع أفكاره وتسجيلاته في شكل كتابة.

وكل معلوماتنا عن عصور ما قبل التاريخ علينا أن نستقيها من بعض الاستنتاجات المبنية على افتراضات متعلقة بالنقوش وحفريات الآثار التي عاشت عبر عوامل الزمن والتي وصلت إلينا من خلال علم المستحاثات.

يرى هيرودوت أن أصل الهندسة بدأ في وادي النيل لاعتقاده أن المادة ظهرت على إثر الحاجة لحساب المساحات بعد الفيضان السنوي للنيل. ويرى أرسطو بأن وجود طبقة الكهنة المعفية من العمل كانت الحافز على وجود الهندسة .

وبغض النظر عن صحة إحدى هاتين الفكرتين (أوكليهما) فباستطاعتنا أن نتصور أن الإنسان القديم كان يملك القليل من الفراغ والقليل من الحاجة إلى المعرفة. ولكن رسوماته ونقوشه تفترض وجود علاقة ما بالهندسة وخصوصاً عند ملاحظة الخطوط المنحنية والأشكال الهندسية الفراغية التي تحتوي على تناظر أو تشابه (تدل على بداية الهندسة الأولية).

من أجل الحقبة التي عاش فيها إنسان ما قبل التاريخ لا توجد أية وثائق تساعد في اقتفاء آثار تطور الرياضيات ، من مجرد نقوش ورموز على حجر، إلى النظريات المعروفة .

فمن الممكن أن النقوش الفراغية لإنسان ما قبل التاريخ نابعة من شعوره بمتعة الجمال (للأسباب نفسها يقوم أحياناً رياضيو اليوم بالشيء نفسه) . ولكن هناك احتمالات أخرى أحدها هو بدايات الهندسة ، مثلها مثل الأعداد ، كانت لأسباب روحانية. وإن أقدم النتائج في هذا المجال وجدت في الهند ضمن الوثائق المعروفة باسم "سولفاسوتراس Sulvasutras (rule of god)" حيث توجد علاقات وثيقة مع بناء المعابد والهياكل والتماثيل. وأكثر المعلومات الواردة والموثقة من الحضارات القديمة هي من الحضارتين المصرية والبابلية في وادي الرافدين بالإضافة إلى بعض المعلومات الشحيحة عن الحضارتين الصينية والهندية في هذا المجال. و لكل من هذه الحضارات إنجازات في:

- العد والعمليات الحسابية و الجذور التربيعية
- المعادلات الخطية والتربيعية
- مبادئ الهندسة ونظرية فيثاغورث
- الحسابات الفلكية والتاريخية

حضارة وادي الرافدين ❺

تميزت الألفية الرابعة قبل الميلاد بازدهار أدبي وحضاري ناتج عن استخدام الكتابة والعجلات والمعدن . في هذه الفترة بنى السومريون البيوت والمعابد والهياكل وزينوها بأنواع الديكور والموزاييك بطرق هندسية، وأقاموا الأقنية للري. وتبين الكتابات على الألواح أن تطور السومريين سبق كثيراً أيام النبي إبراهيم ، وقد تكون هذه أول كتابات في التاريخ ، ومن المحتمل أن تكون وجدت قبل الكتابة في مصر.

كانت المنطقة مابين النهرين معرضة باستمرار للتغيير بسبب الغزوات المستمرة. فمثلاً غزو الأكاديين، بقيادة سارغون العظيم (٢٢٧٦ - ٢٢٢١ ق م)، أدى إلى تأسـيس إمبراطورية من فارس ، في الشرق ، إلى البحر المتوسط في الغرب. ومن خلال هذا التوسع تم انتشار الحضارة السومرية في بلاد الرافدين ! نعرف ذلك من الألواح. وقد جاءت غزوات أخرى ولأعراق مختلفة فيما بعد مثل العموريين والآشوريين والفرس والكلدانيين الذين عاشواً في بلاد الرافدين (القرن السابع ق م) ، ولكن هذا بمجموعه لم يمنع من وجود حضارة واحدة متجانسة في وادي الرافدين بسبب وجود الكتابة وتداولها على الألواح. وهي ألواح من الطين جففت في الأفران أو تحت الشمس. وهذه الألواح حافظت على نفسها ، لحسن الحظ ،عبر الزمان (أكثر من برديات وادي النيل) الأمر الذي جعلنا نعرف أكثر عن حضارة وادي الرافدين بما فيها الرياضيات . وقد تمت

قراءة أخر الألواح في الربع الثاني من القرن العشرين. هذا وتحتوي مكتبات جامعات كولومبيا ببنسلفانيا على ٥٠٠٠٠ لوح من هذه الكتابات (من عهد نيبور) ومنها تظهر الكتابات الأولى في وادي الرافدين على مئات من الألواح الطينية التي يعود تاريخها إلى ٥٠٠٠ سنة مضت، وخلال هذا الوقت وصلت الكتابة إلى مرحلة جيدة مثل:≈ ماء و Φ عين وتركيب الرمزين يعني البكاء، وتدريجياً كانت الرموز تصغر وتقل فقد تم اختصار الألفين رمزاً، السومرية، إلى الثلث فقط أثناء سيطرة الأكاديين . غير أن الانجازات الحقيقة والمهمة في وادي الرافدين، في الرياضيات ، كانت على يد البابليين.

حضارة وادي النيل ❻

ظهرت الزراعة في وادي النيل قبل ٧٠٠٠ سنة ، وتزامناً مع ذلك ظهر الفن هناك كمحاولة للتعبير عن أن الملوك (الفراعنة) يمثلون صلة بين الإله والبشر . ومن الملفت للنظر هذا التواقت العجيب بأصول الكتابة واستخدام العجلات في مصر وبلاد الرافدين بالرغم من عدم وجود ما يدل على ما هو مشترك في الرمز أو النطق ، ولذلك لا يمكن النفي أن تكون الكتابة قد وجدت في مصر قبل الكتابة في بلاد الرافدين.

ولقد أدت السيطرة اليونانية ، فيما بعد، إلى اختفاء الوصف الهيروغليفي ولكن اللغة الهيروغليفية اكتشفت ، من خلال حجر رشيد ، بمقارنة الوصف اليوناني مع الوصف الهيروغليفي . وقد قام بذلك الفرنسي شامبليون في عام ١٨٠٠ م ، خلال فترة وجود نابليون في مصر. وسوف نتكلم عن إنجازات المصريين (وكذلك إنجازات البابليين) في الفصل القادم.

الحضارة الصينية ❼

لقد كونت الكتابة على العظام المصدر الرئيس لمعرفتنا عن النظام العددي الصيني حوالي ١٦٠٠ ق م . وقد كان الازدهار الفعلي في الصين حوالي ٦٠٠ ق م – عهد الفيلسوف كونفوشيوس- حيث وجدت مدارس فلسفية وتقنية كثيرة ، وما وصل من معلومات حول إنجازاتهم في الرياضيات يمكن عرض ملخصها بما يلي:

① **العد والعمليات الحسابية:** استخدموا نظام الضرب المبني على الأساس ١٠، ومن المحتمل أن تطور النظام هذا متعلق باللوح الحاسب، حيث ترتب قوى ١٠ في أعمدة رأسية. و يتم إجراء العمليات الحسابية، في معظم الحالات ، باستخدام الكسور العشرية.

② **المعادلات الخطية** : حل الصينيون بعض المعادلات الخطية المشابهة للحالات التي عالجها المصريون، ومثال على ذلك المسألة المتعلقة بالأرز وهي:

<u>مسألة:</u> مقابل ٥٠ مكيالاً من الطحين تحصل على ٢٤ من الأرز . كم مكيالاً من الأرز تحصل مقابل ٤٥/١٠ من الطحين؟

وقد عالجوا أيضا حل جملة معادلتين بمجهولين، وثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل (بطريقة مشابهة لطريقة غاوس).

③ **مبادئ الهندسة**: عالج الصينيون الدائرة حيث قبلوا أن:

محيط الدائرة = ٣ أمثال القطر

وقد عرف الصينيون حساب حجم الهرم، ولكن غير معروف كيف تم ذلك.

④ **الجذور التربيعية:** لإيجاد الجذور استخدم الصينيون المطابقة الآتية :

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

(وهي مشابهة لطريقة استخدام اللوغاريتم التي تدرس في المدارس حاليا).

⑤ **نظرية فيثاغورث** : يوجد برهان هندسي وصفي لنظرية فيثاغورث قبل عدة مئات من السنين ق م (لم يعرف الصينيون المسلمات). وهذه النظرية وإن كانت تعزى إلى فيثاغورث ، فهي قد عرفت واستخدمت قبل فيثاغورث بزمن طويل.

الحضارة الهندية 8

أقدم حضارة هندية (لم تظهر فيها الرياضيات) ظهرت على نهر الغانج (١٠٠٠ ق م) بواسطة ملوك وكهنة البراهما، ولكن لا توجد أمثلة مادية كثيرة بسبب النقل الشفهي للمعلومات. من الموضوعات التي عالجها الهنود قبل الميلاد نعرض ما يلي:

① **العـد**: لا يوجد تاريخ مسجل لاستخدام الأعداد الهندية. لكن هذه الأعداد وجدت منقوشة على (صخرة المراسم) التي خلفها " أشوكا" (٢٥٦ ق م) . فقد أورثتنا الهند طريقة التعبير عن كافة الأعداد بنظام عشري خليط من النظامين الصيني والمصري. كان الجديد هو اعتماد رموز جديدة للأرقام من ١ إلى ٩ مع استخدام ما نسميه اليوم بمنزلة الرقم في العدد . ونحن اليوم نستخدم هذه الأرقام بعفوية (غافلين أحياناً) عن البساطة والعمق في هذا النظام الذي جعل من علم الحساب اكتشافاً عظيماً ومفيداً ، في المقام الأول ، بين سائر الاكتشافات الهامة والنافعة. وقد طور العرب نظام الترقيم الهندي حيث تم نقل هذا النظام المعدل فيما بعد إلى الغرب.

② **مبادئ الهندسة**: تبين التسجيلات أن جميع القدامى قبل التاريخ،عرفوا كيفية حساب المضلعات القائمة . وكذلك الأمر في الهند حيث نجد في السولفاسوتراس الهندي طريقة

لتربيع الدائرة من خلال اعتبار القطر ٨ أجزاء ليحصلوا بعد ذلك على طول ضلع المربع بواسطة مجموع من الكسور وبعدئذ يتم الاستنتاج أن: $\pi = 3.0883$. وهم بالتأكيد توصلوا إلى نظرية فيثاغورث منذ القدم ، حيث يبدو أثر ذلك واضحاً في قياس مذابح القرابين وبناء المعابد.

③ **الجبر**:عرف الهنود الجبر قبل الونانيين وبعدهم، وأشهر علماء الهند في هذا المجال

براهماغوبتا (٦٢٨ ب م Brahmagupta) وباسكارا (١١١٤– ١١٨٥ ب م Bhaskara)، حيث تعامل الأول مع العمليات على المقادير الموجبة والسالبة (ولكن كانت مشكلته مع الصفر فقط) وتعامل الثاني مع الجذور التربيعية ومع بعض المعادلات التي تعرف اليوم بالمعادلات الديوفانتية .

تساؤلات

① كيف تصف بعض المعالم التي ظهرت على أساسها الرياضيات ما قبل التاريخ .

② من الواضح أن الرياضيات بدأت مع بداية التفكير البشري . هل تعتقد بوجود الرياضيات ما قبل الإنسان؟

③ أعط بعض الملامح لاستخدام الإنسان أنظمة عد مختلفة عن ١٠.

④ ما هو العامل الأكثر تأثيراً على تطور الهندسة برأيك؟ هل هو الاهتمام بعلم الفلك أم هو الحاجات المرتبطة بالبقاء؟ وضح جوابك!

⑤ ما هو التقسيم الزمني الذي لاحظه الإنسان البدائي أولاً ؟ هل هو اليوم أم الشهر أم الأسبوع أم اليوم أم الساعة؟ علل رأيك.

إنجازات البابليين

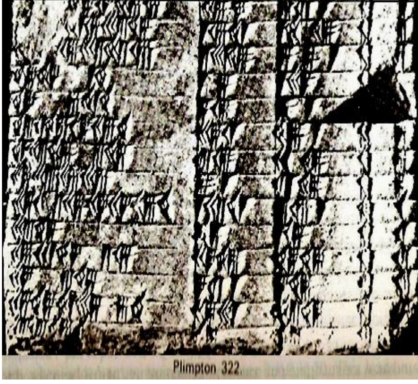
الوصف البابلي ❶

تبنى البابليون طريقة كتابة السومريين للأحرف والأعداد ، وقد تجلى ذلك بآلاف الألواح من عهد حمورابي (١٨٠٠- ١٦٠٠ ق م) ومن بينها قوانين حمورابي وشرائعه. وظهر نظام العد الستيني الذي تم تبنيه في ذلك الحين. أما سبب تبني النظام الستيني فهو غير معروف، فلربما تطور عن خليط من النظام العشري والسداسي لأسباب فلكية ولكن الأكثر احتمالاً لظهوره هي أسباب حسابية كون العدد ٦٠ يقبل القسمة على أعداد كثيرة هامة مثل ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ... الخ . مهما كان فإن النظام الستيني اكتسب شهرة واسعة وعاش حتى يومنا هذا متجلياً في واحدات الزمن وقياس الزوايا.

إن حضارة وادي الرافدين أقدم من البابلية ومدينة بابل لم تكن الأولى ولكنها سميت كذلك بسبب سيطرة البابليين في الفترة من ٢٠٠٠ حتى ٦٠٠ قبل الميلاد . ويمكن القول إن الإنجازات الحقيقية في الرياضيات تعود في تلك الحقبة للبابليين. من المآخذ على الرياضيات البابلية أنها اقتصرت على معالجة مسائل تتعلق بالحياة اليومية والعملية، وبالرغم من أنها عالجت مسائل كثيرة ومتنوعة فلم توجد طريقة عامة للحل أو منهج منطقي للبراهين . غير أن آثار هذه الرياضيات بقيت لمدة طويلة . ولا يمكن تفسير الإنتاج العبقري لليونانيين بغير اطلاعهم على الرياضيات البابلية ووعيهم لها.

تمت قراءة اللغة البابلية من خلال مقارنة الوصف البابلي والوصف الفارسي (٦٠٠ ق م) لانتصارات الملك داريوس العسكرية . هذه المقارنة جعلت راولينسون

(Rawlinson) يكتشف قراءة اللغة البابلية (الشكل١ يظهر أحد الألواح المسمارية الشهيرة Plimpton 323). بلغ البابليون قمة حضارتهم وقوتهم على يد نبوخذ نصر في عام ٥٧٥ ق م، ولكن في سنة ٥٣٨ ق م سقطت بابل في يد الفرس وانتهت بسقوطها إمبراطورية البابليين.



شكل١

إن الحضارة البشرية متداخلة وتراكمية في آن واحد . ولا يجوز لأي أمة أو شعب أن يدعي العبقرية والإنتاج المتميز دون أن يكون قد بني على ما سبقه . ولقد أسهم أهل مابين النهرين في الحضارة الإنسانية مساهمة فعالة ومتميزة وقدموا الشعلة الحضارية لمن بعدهم مثل اليونان والعرب الذين قاموا بدورهم في نقل هذه الشعلة للغرب الأوروبي.

مبادئ الهندسة ❷

تعود بدايات الرياضيات في كثير من المواضيع إلى البابليين بدءاً من الأعداد وصولاً إلى الهندسة، وكان لهم إنجازات مميزة في هذه المواضيع نذكر منها:

① **في الهندسة:** يبين اللوح البابلي (شكل٢) اهتمام البابليين في الهندسة . فقد كان لديهم ثوابت لحساب الأشكال: مثل المثلث وشبه المنحرف والدائرة . وقد اعتبروا (وهذا خطأً) مساحة الشكل الرباعي على أنه ناتج ضرب الوسطين الحسابيين لكل ضلعين متقابلين . كما عالجوا مسألة حساب مساحة الدائرة ومحيطها حيث اعتبروا أن محيط


شكل٢

الدائرة يساوي $3\frac{1}{8}$ أمثال القطر . وقد عرفوا أيضاً أن الزاوية المرسومة في نصف دائرة هي زاوية قائمة (تعزى هذه النظرية لتالس بالرغم من أن تالس عاش بعد ألف عام من معرفة البابليين لها (اللوح المسماري على الشكل ٢ يبين ذلك) .

بالإضافة إلى ذلك فقد درسوا حجم الهرم (كصومعة لتخزين الحبوب) وخصوصا الهرم المعروف باسم الهرم ذي الرأس الخطي وعرفوا كيفية حساب حجمه وبالتالي سعته .

② **نظرية فيثاغورث:** عرفت نظرية فيثاغورث ، من قبل الأقدمين، قبل ١٠٠٠ سنة من فيثاغورث ولكن مصدرها الأصلي غير معروف. ويلاحظ وجود جدول بثلاثيات فيثاغورث بالنظام الستيني على الألواح البابلية يعود إلى ١٧٠٠ ق م (انظر شكل١)، علماً أن الثلاثية (x,y,z) من الأعداد ، تصنف بالفيثاغورثية إذا حققت العلاقة :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

③ **الجذور التربيعية :** اهتم البابليون بالجذر التربيعي والجذر التكعيبي للأعداد وقد كان لهم طريقتهم الخاصة في إيجاد الجذر التربيعي وهي مشابهة لطريقة نيوتن (التكرارية). هذه الطريقة التي تعزى مرة إلى نيوتن، ومرة أخرى إلى أرخميدس أو غيره ، هي في الحقيقة من اختراع البابليين.

العد ❸

لم تكتشف عمليات جمع بابلية (ربما استخدمت من الذاكرة) ولكن استخدمت عملية ضرب معقدة باستخدام النظام الستيني. نظرا لذلك كان يفهم الرقم أحيانا من سياق الجملة. كما استخدموا جداول خاصة لمقلوب الأعداد.

واستخدموا كذلك النظام العشري للأعداد تحت ٥٩ كما استخدموا النظام الستيني، المبني على الأساس ٦٠ ، للأعداد فوق ٥٩ . من ميزات هذا النظام أنه استخدم لتقسيم الساعة إلى ٦٠ دقيقة والدقيقة إلى ٦٠ ثانية والدائرة إلى ٣٦٠ درجة .

ولكن ظهرت مشكلة هي كيف تحفظ الرموز من ١- ٥٩ ؟ لحل هذه المشكلة اقتصر مبدئياً على استخدام رمزين هما:

T = 1 , ≺ = 10

فمثلاً يتم التعبير عن العدد ١٠٨٨٢ بثلاث خانات مرتبة (آحاد ، عشرات ، مئات) وفق الشكل التالي:

TTT T ≺≺TT

$$\begin{aligned} &= 3,\quad 1,\quad 22 \\ &= 3(60)^2 + 1\times(60)^1 + 22(60)^0 \\ &= 10800 + 60 + 22 = 10882 \end{aligned}$$

علماً أنه يمكن كتابة العدد ٢٢ ، مثلاً، بأحد الأشكال:

≺≺TT , ≺≺ TT , ≺T ≺T

بالرغم من صعوبة الحسابات بالنظام الستيني فقد أحرز البابليون تقدماً كبيراً فيما عرف فيما بعد بالجبر. حتى ليمكن القول أن عبقريتهم في هذا المجال تضاهي عبقرية الإغريق في الهندسة . فقد عرفوا حلول معادلات الدرجة الأولى والثانية وبعض أنواع معادلات الدرجة الثالثة برغم افتقارهم لأي رموز أو معادلات أو حتى رمز للكمية المجهولة. مثل هذه الجهود تبدو عجيبة ويصعب تصديقها . ولكن ربما ساعدتهم حساباتهم المجردة وجداولهم الرياضية لاكتساب الصبغة الجبرية والاتجاه الجبري.

قصة البرج ❹

يَعتقد أن البابليين بنوا برج بابل الشهير في نهاية الألفية الثانية قبل الميلاد. بالرغم من أن بعض علماء الآثار يرون أن قاعدة البرج دائرية إلا أن المرجح أن تكون مربعة الشكل ،

ويعتقد أن ارتفاع البرج مساو لطول ضلع القاعدة الذي قدر بـِ ٩٠ متراً. ويعتقد أيضاً بأن البرج تكوّن من ٨ طوابق يتم الصعود فوقه بطريقٍ شكله حلزوني يلتف حول البرج من الخارج كما وصفه المؤرخ اليوناني هيرودوت، عام ٤٦٠ قبل الميلاد ، الذي زار البرج ولكن بعد تدميره من قبل الفرس عام ٤٧٨ قبل الميلاد.

من الألواح يتبين أن البابليين بنوا برج بابل بشكل متدرج نحو الأعلى حيث يلاحظ مايلي:

إذا كان حجم الطابق الأول : $n \times n \times 1$

فإن حجم الطابق الثاني $(n-1) \times (n-1) \times 1$

وسيكون حجم الطابق قبل الأخير $2 \times 2 \times 1$

وسيكون حجم الطابق الأخير $1 \times 1 \times 1$

بذلك يكون حجم البرج $1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$



برج بابل

وفي هذا الصدد يلاحظ على الألواح وجود حساب قيم مثل:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2 \ .$$

وهذا قد يوحي أن عدد طوابق البرج هي ١٠ وليس ٨.

لقد ذكر في سفر التكوين أن بناء برج بابل يعود إلى سلاله النبي نوح ، بعد حدوث الطوفان ، وأن الهدف من بناء البرج هو الوصول إلى السماء (الجنة) . في هذه الحالة يكون البناة قد اعتقدوا خطأ أن السلسلة التي تعطي حجم البرج متقاربة .

تساؤلات

① عالج البابليون المعادلات الخطية. وكذلك عالجوا مسألة حل جملة معادلتين خطيتين، وغير خطيتين ، بمجهولين فقد استطاعوا مثلاً حل هذه الجملة:

$$x^8 + x^6 y^2 = (320000)^2$$
$$xy = 1200$$

تحقق أن حل هذه الجملة هو $x = 40, y = 30,$.

② لحساب الجذر $\sqrt{R}$ تصرف البابليون كما يلي: أخذوا a_1 أكبر عدد صحيح أقل من $\sqrt{R}$ وحسبوا:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{R}{a_1}\right) \;,\; a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{R}{a_2}\right), \ldots$$

وهكذا ... بحيث توصلوا إلى متتالية $\{a_n\}$ متقاربة من $\sqrt{R}$ بالقدر الذي نريد وبالدقة المبتغاة .استخدم هذه الطريقة لإيجاد $\sqrt{2}$ (خذ ٥ حدود من المتتالية) ثم $\sqrt{3}$ (خذ ٤ حدود من المتتالية) .

③ لتحويل العدد الستيني $1;12,15,26$ إلى عدد عشري نرتب بحسب تسلسل المنازل:

$$1;12,15,26 = 1\cdot(60)^0 + 12(60)^{-1} + 15(60)^{-2} + 26(60)^{-3} \approx \ldots$$

ثم نحسب الناتج مقرباً إلى المنزلة التي نريد (استخدمت الفاصلة المنقوطة للفصل بين العدد الصحيح والكسر). بين أن العددين الستينيين الآتيين يحولان إلى عددين عشريين (مقربين إلى أقرب ٤ منازل) كما يلي:

$$1)\;\; ;15,30,\; 20 \approx 0.25843$$
$$2)\;\; 1,2;18,10,8 \approx 6230281$$

④ كيف نحل المسألة البابلية القديمة الآتية: مجموع مساحتي مربعين هو ١٠٠٠ وطول ضلع أحدهما أقل بـِ ١٠ من ثلثي طول ضلع المربع الآخر. أوجد طول ضلع كل منهما.

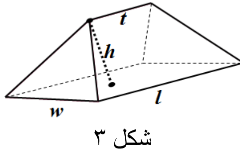
⑤من الأمثلة الفذة التي استعمل البابليون فيها نظرية فيثاغورث هي المسألة التالية : عمود طوله ٠,٣٠ مسند عمودياً إلى جدار. انزلقت حافته العليا بمقدار ٠,٦٠. فكم تحركت حافته السفلى؟ ناقش الحل!

⑥على أحد الألواح البابلية المكتشفة في "سوسا" وجدت المسألة الآتية: أوجد نصف قطر الدائرة المارة من رؤوس مثلث أطوال أضلاعه : ٥٠ و ٥٠ و٦٠ . كيف نحل هذه المسألة؟

⑦ توصل البابليون إلى معرفة حجم الصومعة (الهرم المنتظم ذو الرأس الخطي – شكل٣) . فإذا كان w عرض القاعدة، ℓ طول القاعدة ، t طول الرأس، h طول الارتفاع فإن حجم الهرم هو

$$v = \frac{hw}{3}\left(t + t/2\right)$$

كيف تثبت ذلك؟



شكل ٣

⑧ عرف البابليون أن

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n+1)$$

ولكن أول من برهن على هذه الصيغة هو أرخميدس . كيف نبرهن على صحة هذه الصيغة

⑨ ما هي الفوائد وما هي المآخذ على أنظمة العد الثنائي العشري الستيني...الخ ؟ وما هو ارتباط ذلك باختيار الإنسان البدائي لنظام معين؟

⑩عرف البابليون أن الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة هي زاوية قائمة ، وكذلك كانوا على اطلاع واسع بنظرية فيثاغورث. لماذا كان على الزمن أن يمضي ١٠٠٠عام حتى تم البرهان عليها ، جزئياً أو كلياً ، من قبل تالس أو فيثاغورث ؟

III الفصل الثالث

إنجازات المصريين

البرديات - مصدر المعلومات ❶

اعتقد المصريون ، فلسفياً، بالمصدر الإلهي للرياضيات (من قبل الإله توت) خصوصاً أن كهنة مصر هم من وضع أسس العلوم المصرية بما حوته من خرافات وأساطير. ولكن وبحسب هيرودوت فقد ارتبط منشأ الرياضيات ، وخصوصاً الهندسة ، بحدوث الفيضان السنوي لنهر النيل، حيث ظهرت الحاجة لدراسة مساحات الأراضي وتحديد الشواطئ، ومن خلال ذلك استطاعوا تقدير الدورة السنوية ب ٣٦٥ يوماً، وظهر على إثر ذلك التقويم المصري الذي قل بربع اليوم فقط عن السنة الحالية.

وقد كان المصدر الوحيد لمعلوماتنا عن رياضيات مصر القديمة هو البرديات وخصوصاً البرديتان المعروفتان ببردية موسكو وبردية ريند (التي تعرف أيضاً ببردية أحمس). وقد كتبتا باللغة الهيروغليفية التي فكت رموزها – كما ذكرنا- عن طريق ترجمة حجر رشيد (شامبليون) حيث أدت معرفة اللغة اليونانية إلى معرفة الهيروغليفية .

لقد فقدت للأسف معظم البرديات التي تحتوي على معلومات عن العلوم المصرية. وقد كتب نجيب محفوظ يوماً في إحدى مقالاته ما مفاده أن الفلاحين، وخصوصاً في صعيد مصر، استخدموا آلاف البرديات لاستعمالاتهم اليومية دون أن يدركوا أهمية هذه البرديات في تاريخ الحضارة البشرية .

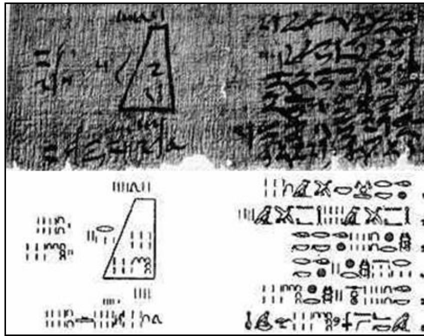
بالرغم من شحة المعلومات فمن المؤكد أن الرياضيات المصرية بلغت درجة عالية من التقدم منذ بداية تاريخ مصر المدون. ويبدو ذلك واضحاً في تصميم الأهرام وتشييدها من

دقة في القياس لا سبيل لها لولا إلمام المصريين آنذاك إلماماً واسعاً بالعلوم الرياضية. فقد بلغت الدقة التي روعيت، مثلاً، في بناء هرم خوفو (الأسرة الرابعة) درجة يجد المرء صعوبة في تصديقها، إذ هي أقرب إلى صنع العدسات البصرية منها إلى أعمال البناء . ولا بد أن ذلك ترافق مع وجود كتبة حفظوا بكتاباتهم تقاليد فن البناء وصاغوها في نماذج ومسائل وحسابات وجداول قد تكون مشابهة لتصميماتنا الهندسية الحديثة.

وقد تمكنوا حتماً من وضع بعض المعادلات الجبرية البسيطة وحلها من دون أن يستعملوا الرموز الحديثة. ولابد أنهم في سبيل ذلك بذلوا جهوداً مضنية لا تقل عن تلك التي بذلوها في بناء الأهرام بلا آلات أو أدوات تضاهي تلك التي نستعملها اليوم.

بردية موسكو ❷

يقال أن بردية موسكو (Moscow Papyrus) تعود إلى أيام النبي إبراهيم حوالي ١٨٥٠ ق م . وقد اشترى هذه البردية الرحالة غولونتشيف من أحد الأسواق في مصر وأحضرها إلى موسكو في عام ١٨٩٣ م ومن هنا أتت التسمية .



بردية موسكو

نجد في هذه الورقة ١٨ مسألة، أكثرها إثارة - ربما - المسألة ١٤ ، حول استخدام صيغة دقيقة لحساب حجم جذع الهرم ، وهذه المسألة هي:

المسألة ١٤: إذا كانت القاعدة السفلى في جذع الهرم مربعاً طول ضلعه a وكانت القاعدة العليا مربعاً طول ضلعه b وكان ارتفاع جذع الهرم h فإن الحجم هو:

$$V = \frac{h}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right) \ .$$

من غير المعروف كيف توصل المصريون إلى هذه العلاقة ولكنهم عرفوا ، وكحالة خاصة لها (عندما $b = 0$) ، أن حجم الهرم يساوي إلى جداء ثلث مساحة قاعدته في ارتفاعه.

لقد بني الهرم الأكبر عام ٢٦٠٠ ق م ، حيث تبين أن نسبة محيط القاعدة إلى الارتفاع تساوي تقريبا ٣,١٤ ولكن هذا لا يعني أبداً أن المصريين عرفوا العدد π بمعناه الدقيق (بل اعتمدوا قيمة تقريبية له). غير أن بناء الأهرامات والممرات بداخلها يدل على معرفة كبيرة بتغيرات حركة الكواكب .

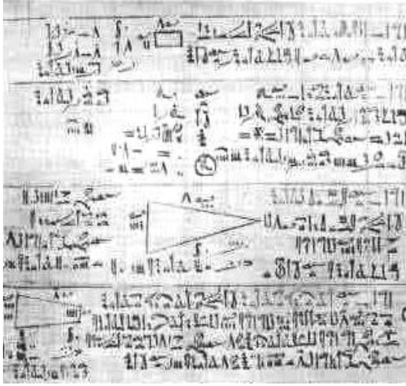
بردية أحمس ❸

" ليكن لدينا آها ، وليكن مجموعه هو وسبعه يساوي ١٩" ! تبدو هذه الجملة لأول وهلة غريبة على أسماعنا وقد توحي إلينا من طقوس عبادة سرية، ولكننا في الحقيقة نردد مثلها مراراً دون أن ندري! لقد ظهرت هذه الجملة على أحد أوراق البردي المصرية القديمة التي عرفت ببردية إحمس . وآها ليست صوتاً من أصوات التعجب بل هي تعني كمية مجهولة لمقادير مختلفة كأن نقول: لتكن x مساوية لكذا ... ويمكن التعبير عن هذه المسألة المصرية المقدسة، بلغة اليوم : إذا كان مجموع x وسبعه يساوي إلى ١٩ فما هي قيمة X ؟ وهي قد تكون مثالاً لمشكلة التصريح عن ضريبة الدخل التي يتوجب دفعها. وتكون المعادلة المناسبة :

$$x + x/7 = 19$$

ويكون الحل $16\frac{5}{8}$ (المبلغ المصرح به للضريبة). وقد توصل المصريون كما يتبين في البردية إلى الجواب نفسه. وتعود هذه البردية لفترة قديمة ،عمرها أكثر من ٤٠٠٠ ، سنة ولكن

أول من وضعها هو **أحمس في ١٦٥٠** ق م (يعتقد أن هذه الفترة هي التي كان فيها النبي يوسف في مصر) وهي ورقة هامة جداً للرياضيات تم شراؤها من قبل تاجر اسكوتلندي (هنري ريند) في بلدة صغيرة على شاطئ النيل في عام ١٨٥٨ وباعها إلى المتحف البريطاني عام ١٨٦٥ م وهي الآن في متحف أكسفورد (ولذلك تعرف أيضاً باسم بردية ريند (Rhind Papyrus).



بردية أحمس

يبلغ طول البردية ١٨ قدم والعرض قدم واحد وتحوي على محاولة وصف دقيق لجميع الأشياء وفكرة عن كل ما هو موجود وتعريف بكل الأسرار الغامضة وهي تحوي على سلسلة من المسائل الرياضية الأولية. فهي بحق تمثل سلسلة (شوم Schaum) ذاك الزمان.

من ضمن ما هو مطروح فيها مثلاً :

- سجل بمعلومات عن ١٢٠٠٠٠ سجين و ١٤٢٢٠٠٠ ماعز.
- كم يلزمنا من الحجر (الطوب) لبناء منزل أو رصف طريق؟
- كم كيس من القمح يلزمنا لإطعام مجموعة من العبيد؟
- ولا يخلو الأمر من الحزازير: رجل عنده ٧ زوجات كل زوجة عندها ٧ خدم عند كل خادم ٧ دجاجات فكم دجاجة عند الزوجة؟.
- هناك أيضا طريقة لضرب الإعداد وقسمتها فمثلاً: كيف تضرب ٧٠ في ١٣ ؟
- ونلاحظ أيضاً في هذه البردية مثالاً هندسياً : حقل دائري قطره ٩ ما هي مساحته؟

وبهدف الحل استخدموا الصيغة الآتية (لحساب مساحة الدائرة التي نصف قطرها r):

$$A = (4/3)^4 r^2$$

نستنتج من ذلك أنهم عرفوا العدد π بقيمة تقريبية هي:

$$\pi \approx (4/3)^4 \approx 3.16$$

الأعداد ❹

لقد كان نظام الأعداد قديماً قدم الأهرامات (على الأقل منذ ٥٠٠٠ سنة) وهو يعتمد على النظام العشري وقوى العشرة كما يظهر على الجدول أدناه . كما يظهر على الجدولين بجانبه طريقة للتعبير عن العددين ٢٧٦ و ٤٦٢٢ :

1	10	100	1000	10000	100000	10^6

Egyptian numeral hieroglyphs

276

4622

ويمكن الملاحظة هنا أن ترتيب المنازل (من الأعلى أو الأسفل أو اليمين أو اليسار) غير مهم ، ولكن من المريح في حالة الحساب أن نبدأ بالمنازل الأعلى من اليسار. مثلا لكتابة الرقم ٣٢٠١٤ بالطريقة المصرية نضع:

$$32014 = 3(10)^4 + 2(10)^3 + 10^1 + 4$$

وبهذا النظام استخدموا العمليات الأربع على الأعداد . وقد كان لهم طريقتهم في ضرب الأعداد من خلال مضاعفة المضروب ومناصفة المضروب به.

بالإضافة إلى العمليات على الأعداد يلاحظ في بردية ريند أن المصريين عبروا عن الكسور، عدا الكسر $2/3$ ، بكسور الواحدة المختلفة ، من الشكل $1/n$ مثلاً:

$$2/9 = 1/6 + 1/18$$

وقد طرح فيما بعد السؤال : متى يمكن القيام بمثل هذا التعبير؟ من خلال الإجابة على هذا السؤال برهن جيمس سيلفستر (١٨١٤–١٨٩٧ م James Sylvester) في عام ١٨٨٠على صحة النظرية الآتية:

<u>نظرية:</u> كل كسر بسيط k/n يقبل التوزيع إلى مجموع من كسور الواحدة المختلفة .

وفي هذا الصدد وضع باول إردوس (١٩١٣-١٩٩٦م Paul Erdos) الفرضية الآتية:

<u>فرضية:</u>إذا كانت $n > 4$ فإن الكسر $4/n$ يقبل التوزيع إلى ثلاثة كسور مختلفة على الأكثر.

هذه الفرضية لم تبرهن حتى الآن إلا في بعض الحالات الخاصة .

تساؤلات

① كيف نكتب الأعداد الآتية بالطريقة المصرية؟ : $a)423$, $b)1111$, $c)21434$

② لحساب جداء العددين ٢١ و ٥٩ تصرف المصريون كما يرد في الجدول المقابل، حيث يتم جمع الأعداد المسبوقة بإشارة الزائد.
كيف نضرب العددين الآتين بالطريقة المصرية :
$a)22 \times 63$, $b)1359 \times 2578$ ؟

11	59
1	59+
5	118+
2	236
1	472+
	649

③ للتعبير عن الكسر $3/5$ ، بواسطة كسور الواحدة المختلفة ، لاحظ المصريون على التوالي:

$$1 < \frac{5}{3} < 2,\ \frac{3}{5} > \frac{1}{2},\ \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6-5}{10} - \frac{1}{10},\ \frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$$

بتكرار هذه العملية فرّق الكسور الآتية بواسطة كسور الواحدة: $4/253$, $3/7$, $13/14$,

④ كيف نوزع الكسر الآتي إلي كسرين واحديين: $4/(4m+2)$ ؟

⑤ كيف نبين أن الكسر $8/11$ لا يمكن أن يوزع بأقل من ٤ كسور مختلفة.

⑥ كيف نبرهن على صحة صيغة حساب حجم جذع الهرم الواردة في المسألة ١٤ في بردية موسكو؟

⑦ ما هو العامل الأكثر تأثيراً على تطور الرياضيات في مصر برأيك ؟ هل هو الاهتمام بعلم الفلك أم هو الحاجات المرتبطة بالبقاء؟ وضح جوابك!

⑧ قارن بين الرياضيات (وخصوصاً الهندسة وعلم المثلثات) البابلية والمصرية من ناحية تأثيرهما على الحضارات اللاحقة.

البدايات اليونانية

❶ مدخل

بينما كان العلم يضمحل في وادي الرافدين ومع تنحي عصر البرونز ليحل محله العصر الحديدي في التسليح، كانت تظهر حضارة جديدة على طول ساحل البحر المتوسط ، من ٨٠٠ ق م إلى ٨٠٠ ب م – عرفت بالحقبة الهيلينية. لم يكن هناك حد فاصل لانتقال الحضارة من وديان الأنهار إلى شاطئ المتوسط ، ولكن اصطلح أن تعد الفترة قبل ٨٠٠ ق م بالحقبة ما قبل الهيلينية وما بعد ٨٠٠ ب م بالحقبة ما بعد الهيلينية. وما يزال يونانيو اليوم يسمون أنفسهم بالهيلينيين نسبة لأسلافهم الذين أقاموا على طول حوض البحر الأبيض المتوسط في ذلك الزمان.

هذا ويمكن العودة بتاريخ اليونانيين إلى الألفية الثانية قبل الميلاد عندما قدموا كأناس غير معروفين من الشمال . لم يأتوا بأي ثقافة رياضية معهم ولكنهم بدوا توّاقين جداً للمعرفة وقد برهنوا على ذلك بعد وقت قصير من قدومهم. فهم على ما يبدو أخذوا من الفينيقيين اللغة (التي أخذت أصلها من العالمين البابلي والمصري) حيث كانوا يسافرون تجاراً ورجال أعمال ومعلمين إلى مراكز العلم في مصر وبابل . ولكنهم لم يكتفو بالتعلم والتلقين بل أصبح لهم طريقتهم الخاصة والمختلفة في النشاط. لم يتردد اليونانيون في تعلم أي شيء من الحضارات الأخرى وكانوا يتعلمون ويسرعون في التقدم على معلميهم – باختصار: كل ما لمسوه سارعوه -

لقد غدا الفرق كبيراً بين الرياضيات البابلية والرياضيات اليونانية ! فإذا كانت الأولى

ذات طابع عملي فإن الأخرى كانت ذات طابع نظري بحت ، حيث سار هذا العلم في ركاب الفلسفة وكان القيمون عليه فلاسفة أكثر منهم علماء. فهم لم يعنوا بالحساب عنايتهم بالهندسة النظرية لأنها مثلت لهم مادة تحوي على سحر يفتن عقولهم وإغراء يأخذ بألبابهم بالمتعة الروحية، بعيداً عن المصالح والمقاصد . ونتيجة لذلك كانت العلوم الرياضية في بلاد اليونان أداة منطقية تهدف إلى التركيب الذهني للعالم العقلي أكثر منها إلى السيطرة على العالم المادي المحسوس. يقال أن أفلاطون غضب غضباً شديداً من أودوكسوس وأرخيتاس لأنهما قاما بتجارب في الميكانيك (فأفسدا الشيء الوحيد الطيب في الهندسة وقضيا عليه قضاء مبرماً وأقصياه على نحو مخجل يجللهما العار بانتقالهما من حيز المسائل العقلية الخالصة إلى عالم المحسوسات) .

الرجلان ❷

حدثت أول ألعاب أولمبية عام ٧٧٦ ق م وفي ذلك الحين كان الأدب اليوناني قد بدأ في الانتشار، وظهر ذلك جلياً في أعمال هوميروس وهيسيود .

وفي القرنين السابع والسادس ق م ظهر الرجلان تالس وفيثاغورث اللذان لعبا دوراً مشابهاً في الرياضيات لذلك الدور الذي لعباه هوميروس وهيسيود في الأدب. وإذا كان هوميروس وهيسيود أقرب إلى الشخصين الخياليين ، حيث أصبح تقليداً أن تعزى إليهما المآثر الأدبية التي تناقلها الناس شفهياً ، فإن تالس وفيثاغورث كانا شخصيتين حقيقتين بالرغم من الغموض الذي يدور حول شخصيهما . فما الذي فعله هذان الرجلان حتى يصنفان بالرياضيين العظيمين؟! ربما كان مفتاح النقلة الأولى هو مقولة:

- إعرف نفسك - للأول
- كل شيء عدد - للثاني

والنقلة الثانية: كان لتالس ولفيثاغورث ميزة إضافية هي إمكانية السفر إلى مراكز التعليم القديمة خصوصاً تلك المتعلقة بالرياضيات والفلك في الصين والهند وبلاد الرافدين، وقيل أنهما تعلما الهندسة في مصر. فكان لهما الفضل الأول في نقل المعلومات الأولى عن الرياضيات البابلية والرياضيات المصرية إلى بلاد اليونان، بحيث غدت مصر عند بعض المؤلفين الإغريق الأولين مهد العلوم ومرجعاً لمن تيسر له زيارة مصر والإقامة فيها والتعرف على الكهنة وأهل العلم هناك.

والنقلة الثالثة: وهي الأهم هو أنهما أسسا لظهور مدارس فكرية وفلسفية متمثلة بتلامذة نجباء قاموا بأعمال لم يسبق لها مثيل. فبينما كان الرياضيون السابقون يعانون صراعاً عقلياً كبيراً ليصلوا إلى إحدى نتائجهم ، فإن اليونانيين لم يكتفو بنجاح النتيجة بل أرادوا تعليلها أيضاً عن طريق أقصر مناقشة منطقية وأكثر صرامة. وأصبحت كتابة البراهين في زمنهم فناً يتباهون فيه باختصار مراحل المحاكمة إلى أكبر حد دون ترك أية ثغرات. كما تمكنوا، على ما يبدو، من ترتيب المعلومات والنظريات صفاً فوق صف لتشكل هرماً يضم المعارف الآخذة في الاتساع التي مثلت أساساً لإقليدس في كتابه "العناصر". ولكن في الحقيقة لا نعرف الكثير عن الرياضيات اليونانية إلا بعد مرور ٢٠٠ سنة على حياة هذين الرجلين .

تالس (٦٢٥- ٥٤٨ ق م) ❸ Thales

تالس هو من ميليتوس (شرق تركيا Militus) .لا يعرف الكثير عن حياة تالس أو أعماله ، وحتى ميلاده وموته محط جدال ومقدران من خلال تنبؤه بالكسوف، في ٢٨ أيار ٥٨٥ ق م، الذي أدهش معاصريه في ذلك الحين. فإذا كان هذا في عامه الأربعين

وعاش كما يقال ٧٨ عاماً، فإن ميلاده يكون في ٦٢٤ ق م ومماته في ٥٤٨ ق م . وإذا كان تنبؤه هذا حقيقة فإنه يدل على صلته بالأدوات والجداول الفلكية في بابل خلال زعامة القائد الشهير نبوخذ نصر .

قال أرسطو عن تالس إنه عمل بتجارة الزيتون وعمل ثروة من خلال هذه التجارة وذلك من خلال معرفته بالتناوب السنوي لمواسم الإنتاج. ولكن أرسطو نفسه قال عنه أيضاً إنه كان يضيع وقته بالشغل على السنانير.أما تالس نفسه فقد رأى أنه لابأس أن يجني الإنسان ثروة في شبابه ليتمتع بها في كبره وليلهو بالرياضيات في شيخوخته.



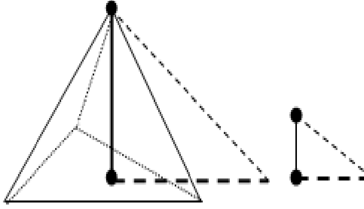
تالس

أخيراً نقول إن الرأي القديم والمتداول بالنسبة لتالس هو أنه رجل ذكي وفيلسوف أول ومع إجماع عام على أنه من حكماء الأقدمين السبعة.

التحكم بالطبيعة عن بعد ❹

تقول المصادر إن تالس استطاع بواسطة أدوات قديمة ومتواضعة وحسابات بسيطة، وصف نشاطات تطبيقية (عملية) مثل مسألة حساب بعد السفينة ، في البحر، عن الشاطئ وحساب ارتفاع الهرم. فقد كتب بليني (pliny) نقلاً عن ديوجين (Diogenes) أن تالس وأثناء إحدى زياراته إلى مصر سأله الكاهن الأعظم عن طريقة لحساب ارتفاع الهرم! فما كان من تالس إلا أن غرز عصاه في الرمل وقال: نستطيع حساب ارتفاع الهرم في أي وقت من يوم مشمس بمقارنة ظل هذه العصـــا ، المعروف

طولها، بظل رأس الهرم . وإذا انتظرنا أن يكون ظل العصا مساوياً إلى طول ظلها فسيكون ارتفاع الهرم مساوياً إلى طول ظله في هذه اللحظة، وطبعاً من مركز الهرم.



خاصة التناسب

وقد استطاع أيضاً ، وباستخدام تشابه المثلثات ، أن يحسب ، ومن بعيد ، المسافة التي تفصل سفينة ما، في عرض البحر، عن الشاطئ . ومن المؤكد أن هذه المسألة تشكل أولى المحاولات للتحكم بالطبيعة من بعيد.

ولكن الأهم مما تقدم فإن تالس يعد بحق الرياضي الأول في التاريخ كمؤسس للتنظيم الاستقرائي في الهندسة. وهذه المقولة تعتمد على إضافة أربع نظريات قيل إن تالس برهن عليها:

١- تساوي زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الساقين.
٢- القطر يقسم الدائرة إلى قسمين متساويين.
٣- الزاوية المحيطية المحددة بالقطر في الدائرة هي قائمة.
٤- الزاويتان المتقابلتان بالرأس لمستقيمين متقاطعين متساويتان.

بالإمكان البرهان على صحة نظريات تالس انطلاقاً من أن مجموع زوايا المثلث ١٨٠ درجة .

تالس الفيلسوف ❺

كان تالس يتعمق بالتفكير في مسائل كثيرة فلسفية وعلمية لدرجة أنه كان ينسى ما حوله (فقد وقع مرة ، وهو في مثل هذه الحالة ، في بئر – نقلاً عن أفلاطون).

بالإضافة إلى مقولته الشهيرة إعرف نفسك **!** التي تعبر عن الفلسفة الاجتماعية ، فقد جال تفكيره في ماهية الكون وبنى أراءه على الفرضيات التالية:

أ- يوجد أكثر من شيء واحد.

ب- يوجد نوع واحد من الأشياء هو الماء.

ج- العالم لا يفهم بأجزائه وإنما بالمادة المستمرة.

من الطبيعي أن لا يتفق الفيزيائيون المعاصرون معه بالنسبة للحكمين ب و ج ولكن هذا أقل أهمية بكثير من أن تالس هو أول من فتح هذا الباب للنقاش في التاريخ. فقد تابع من بعده أناس كثيرون بوضع نظم فلسفية لتفسير الكون وظواهره المتعددة بدءاً من تلامذته أناكسيماندر وبارمينيدس وزينو الإلياتي الذين برزوا كفلاسفة أكثر منهم كرياضيين. ولكن ربما يكون أهم ما ينسب إلى تالس هو أنه "عرف أن الظواهر الطبيعية محكومة بقوانين قابلة للإكتشاف".

فيثاغورث (٥٧٠ – ٥٠٠ ق م) ❻Pytagoras

ولد فيثاغورث في ساموس (Samos) وهي جزيرة على شاطئ آسيا (ليست بعيدة عن ميليتوس). لكنه ترك وطنه وعاش متنقلاً بين مصر وبابل ليستوطن أخيراً قي اليونان . بخلاف تالس، الذي اهتم بالقضايا العملية ، كان فيثاغورث فيلسوفاً نظرياً وروحانياً.


Pythagoras
Culver Pictures, Inc.

فيثاغورث

يقال إن فيثاعورث تتلمذ على يد تالس ولكن هذا أمر مشكوك فيه لوجود فارق ٥٠ عاماً بين الرجلين. وربما كانت بعض اهتماماتهما المشتركة نابعة من أن فيثاغورث، مثله مثل تالس، سافر إلى مصر وبابل وربما إلى الهند. وكان من بين من قابل كهنة زرادشت الذين ذكروا في قصة ميلاد المسيح باسم الحكماء والذين أصبحوا أوصياء على المعارف الرياضية ، في بلاد مابين النهرين، في زمن الحكم الفارسي.

ومن الواضح أن فيثاعورث استوعب القضايا الدينية بالإضافة إلى الرياضيات والفلك. ومن الصدف أن يكون فيثاغورث معاصراً **لبوذا وكونفوشيوس** وخصوصاً أن ذلك العصر كوَن منعطفاً هاماً في تطور الأديان كما في تطور الرياضيات. وعندما عاد فيثاغورث إلى عالم اليونان تمركز في (شمال إيطاليا) وأسس جمعية سرية من أسسها الفلسفة والرياضيات.

إن الغموض في شخصية فيثاغورث مرده إلى فقدان الكثير من وثائق تلك الحقبة. والصعوبة الأخرى في المعرفة عنه تعود إلى سرية الجمعية، حيث كانت بعض الأفكار محجوبة عن الجمعية ومحتكرة للمعلم. بالإضافة إلى ذلك فقد اتفق على مرد جميع الإنجازات إلى المعلم. لذلك من الأفضل الحديث عن انجازات الفيثاغورثيين أكثر من الحديث عن إنجازات فيثاغورث نفسه.
تزوج فيثاغورث من سيدة أسمها تيانو، يقال إنها أول رياضية في التاريخ.

العقيدة الفيثاغورثية ❼

يعد فيثاغورث واضع حجر الأساس للعلم الرياضي في بلاد اليونان، وقد تمثل ذلك بتأسيس نظام جديد عرف بالنظام الفيثاغورثي أو العقيدة الفيثاغورثية.
أكثر ما هو مفاجئ في النظام الفيثاغورثي الإيمان بدراسة الرياضيات والفلسفة على

أسس مرتبطة بالروحانيات والفضيلة في مسيرة الحياة. فقد كانت مهمة الفلسفة بالنسبة لهم حب الحكمة بينما الرياضيات يفترض أن تصف النشاط الأدبي. فكما أن الرياضيات متمثلة بالأعداد هي مفتاح للغز الكون ، هي أيضاً أداة لتطهير النفس في الوقت نفسه. فقد رأوا أن الأعداد تمثل المادة الحقيقية التي يتكون منها العالم (عالم الفيثاغورثيين)! إنها كل شيء في الوجود اتفاقاً مع مقولة فيثاغورث: كل شيء عدد!

كان سلطان الأعداد الصحيحة على الفيثاغورثيين سلطاناً فريداً سحر ألبابهم وأقنعهم أن الكون كله مبني على هذه الأعداد، فجعلوا يصنفونها في أصناف مختلفة وقد وضعوا تنظيماً وجودياً لما تمثله الأعداد مثلاً:

- العدد ١ مولد الأعداد وبداية السببية
- العدد ٢ العدد الزوجي الأول والعدد المؤنث وعدد الرأي.
- العدد ٣ العدد المذكر – عدد التوافق.
- العدد ٤ عدد العدالة أو الحق
- العدد ٥ عدد الزواج (مركب من عددي المذكر والمؤنث)
- العدد ٦ عدد الخلق ....

بالإضافة إلى ذلك فقد أطلقوا على النقطة العدد ١، وعلى الخط العدد ٢، وعلى السطح العدد ٣ ،وعلى المجسم العدد ٤، وذلك تبعاً للحد الأدنى من النقاط اللازمة لتحديد كل من هذه الأشكال. فالنقاط ، بحسب مفهوم الفيثاغورثيين، لها حجم أو مقدار ! فالنقاط تكوّن المستقيمات والمستقيمات تكون السطوح والسطوح تكون الأجسام وهكذا من الأعداد ١ ٢ ٣ ٤ أمكنهم بناء عالم بأكمله . وقد صنفوا العدد ١٠ على أنه العدد الكوني الكلي ، كون هذا العدد يمثل مجموع الأعداد الأربعة السابقة التي تمثل جميع الأبعاد الهندسية (يمكن أن نستنتج من ذلك أن كونية العدد ١٠ لم ترتبط بعدد أصابع اليدين). وبذلك يمكن تصنيف

هذا التنظيم الكوني كما يلي:

- النقطة : العدد ١ ← لها حجم أو مقدار
- الخط : العدد ٢ ← النقاط تكون المستقيمات
- السطح : العدد ٣←المستقيمات تكون السطوح
- المجسم : العدد ٤ ← السطوح تكون الأجسام
- من الأعداد ١ ٢ ٣ ٤ ← تكوين العالم .
- العدد ١٠ ← العدد الكوني الكلي ; كون هذا العدد يمثل مجموع الأعداد الأربعة السابقة التي تمثل جميع الأبعاد الهندسية.

من خلال عبارة "كل شيء عدد" لاشك أن الفيثاغورثيين ، أثناء تطويرهم لتعاليمهم الخاصة ، فهموا الأعداد على أنها مفاهيم مثالية والأجسام الفيزيائية على أنها حقائق ملموسة. وقد كانت أفكار المدرسة الفيثاغورثية محافظة سياسياً، ومع أساليب محددة للاتصال والإدارة. فقد كان على الأعضاء:

- أن يكونوا نباتيين
- القبول بتقمص الأرواح (بما فيها أن الحيوان المذبوح قد يكون انتقال روح صديق متوفٍ إلى مكان جديد).
- ومن بين المحرمات على الفيثاغورثيين أكل البازلاء ،

وقد تلخصت العقيدة الفيثاغورثية بالاتجاهين الآتيين:

١) افتراض أن الفضاء مركب من النقاط واللحظات وأنه محكوم بالتعدد والتغير والعنصر الأساسي للتعدد يملك صفات الوحدة الهندسية (أي أن الطبيعة بنيت على أسس رياضية). وقد قوبلت أفكار الفيثاغورثيين هذه بالأفكار الفلسفية لجيرانهم الإلياتيين من حيث وحدة الأشياء وسكونها (كما سنرى فيما بعد).

٢) اعتبار أن الأعداد تمثل جميع ظواهر الطبيعة وتفسرها إن كان فيما يخص الهندسة أو القضايا العملية والنظرية الأخرى للإنسان

بالرغم من شكوكنا بالفلسفة العددية للفيثاغورثيين فإننا لا ننسى أننا نعيش اليوم في عصر الحوسبة والتكنولوجيا الرقمية ولذلك لا نستطيع أن ننكر أن الفيثاغورثيين عادوا إلينا من جديد ليعيشوا عصرهم الذهبي الجديد الذي هو (عصر الكومبيوتر).

تلامذة فيثاغورث ❽

لقد تمثلت المدرسة الفيثاغورثية وعقيدتها بفيثاغورث وتلامذته . من هؤلاء التلاميذ:

① **أناكساغوراس** (؟- ٤٢٨ ق م Anaxagoras of Ionia) :اعتبر أناكسوغوراس كافراً لقوله إن الشمس ليست مقدسة وإنما هي صخرة كبيرة متوهجة، والقمر هو أرض مأهولة تستمد ضوءها من الشمس وأودع السجن بسبب ذلك . ورياضياً وبينما كان في السجن حاول تربيع الدائرة (وهنا كانت بداية المسألة التي شغلت الناس ٢٠٠٠ سنة). هنا ظهر للمرة الأولى (بخلاف ما كان يحدث أيام المصريين والبابليين) أن المسألة يمكن أن تدرس نظريا وعقلياً من خلال التعبير الجميل بين دقة الأفكار ودقة التقريبات. وبالتالي النظرة إلى الرياضيات كفلسفة أكثر منها مجرد تطبيقات عابرة . توفي أناكساغوراس في عام ٤٢٨ ق م قبل يوم واحد من ولادة أرخيتاس.

② **أرخيتاس** (٤٢٨ -؟ ق م Architas) : كان أرخيتاس لطيفاً ومحباً للأطفال وأعار الانتباه إلى أهمية الموسيقى في تثقيفهم، وقد صنع لهم ألعاباً منها ما يعرف " بصفارة أرخيتاس" ومنها ما يعرف عامة (بالخشخيشة) التي التهى بها الأطفال وكفوا عن تحطيم الأدوات المنزلية ، كما اخترع ألعاباً وأدوات أخرى مثل البكرة والعجلة ، مما يجعله من المؤسسين الأوائل لعلم الميكانيك في بلاد اليونان ، حيث يقال إنه ألف كتاباً في هذه

المادة. وإذا كان هذا صحيحاً فإنه يكون أول كتاب في هذا العلم. ولكن محبته واهتمامه في هذه المادة التطبيقية جرت نقمة أفلاطون عليه (وكذلك على أودوكسوس الذي عمل أيضاً في الميكانيك). فقد رأى اليونانيون ، في ذلك الوقت، أن استخدام العلوم لأغراض مادية عملية يحقرها ويحط من قيمتها . فقد كتب أفلاطون عن أرخيتاس وأودوكسوس: بقيامهما بتجارب في علم الميكانيكا أفسدا الشيء الوحيد الطيب في الهندسة وقضيا عليه وأبعداه عن المسائل العقلية الخالصة وجوزيت الميكانيكا على ذلك أشد الجزاء . ياللخطب العظيم فقد انفصلت عن الهندسة الأم وأصبحت من فنون الحرب **!!** ياللعار والشنار**!!**

مثل هذه النظرة إلى العلوم التطبيقية جعلت اليونانيين متخلفين في ميادين الاختراعات والاكتشافات الأمر الذي أدى إلى تأخرها حتى بداية النهضة الأوروبية.

وقد أظهر أرخيتاس الدور الرئيسي الذي تلعبه الرياضيات في الثقافة وله يعود تصنيف الرياضيات إلى أربعة فروع:

- الحساب: الأعداد والبقية
- الهندسة : المقادير والبقية
- الفلك: المقادير والحركة
- الموسيقى: الأرقام والحركة

يعود الفضل للفيثاغورثيين (ومن بينهم أرخيتاس) في صياغة الموسيقى بعلاقات رياضية بسيطة عندما اكتشفوا حقيقتين:

الأولى: الصوت الناتج عن الخيط الوتري يعتمد على طول الخيط.

الثانية: هي أن النغمات الصوتية تتولد بواسطة أوتار ذات أطوال معينة ،عبارة عن نسب من الأعداد الصحيحة (تعرف فترات هذه النغمات حالياً بالثمانية أو الخماسية ...). بل وصلت القناعة عندهم إلى أن أي تناغم أو جمال في الطبيعة يعبر عنه بعلاقات ذوات

أعداد صحيحة وبلغ بهم الأمر أن اعتقدوا أن الكواكب السيارة تولد تناغماً سماوياً ذا أعداد صحيحة في حركاتها على مداراتها يسمى " موسيقى السموات" .

عيِن أرخيتاس جنرالاً لأعوام كثيرة حيث لم يخسر الحرب أبداً . ولعل أكبر خدمة قدمها للرياضيات هي تدخله لدى الطاغية ديونيسيوس لإنقاذ صديقه أفلاطون من العبودية.

③ **هيباسوس**(٤٧٠ -؟ ق م Hippasus of Croton) : كان هيباسوس فيثاغورثياً ولكنه فصل من المدرسة لأنه اكتشف بنفسه المضلع البنتاغون ولم يعزه للمعلم، ثم عوقب فيما بعد بالموت غرقا ، من على ظهر السفينة، لأنه لم يحافظ على السرية في الجمعية من خلال كشف سر العلاقة بين الضلع والقطر في المربع .

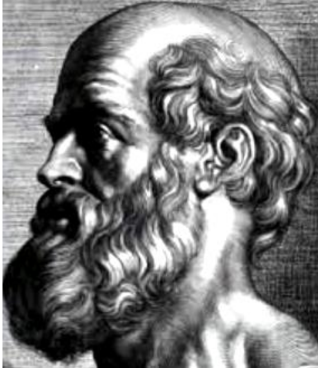
يمكن القول إن عقيدة الفيثاغورثيين تتلخص باعتبار أن الأعداد تمثل وتفسر جميع ظواهر الطبيعة. ولكن مما حجم العقيدة وهز دعائم أركانها هو ظهور أعداد غير عادية (الأعداد الصم). وكان ذلك واضحاً في أبسط المعاني الهندسية كعلاقة طول ضلع المربع بقطره، حيث لا يمكن وصف هذه العلاقة بأعداد عادية مهما صغرت الواحدة ويبدو أن الفيثاغورثيين (بمن فيهم فيثاغورث نفسه) كانوا على علم بذلك مبكراً ولكن أول من فضح السر هو هيباسوس الذي دفع حياته ثمناً لذلك.

هيبوقراط (٤٣٠ ق م) ❾ Hippocrates

هيبوقراط هذا من كيوز(جزيرة يونانية-Chios) وهو غير هيبوقراط الفيزيائي المعاصر له والمشهور أيضاً ، وهو بالإضافة إلى أنه عمل في الرياضيات فقد عمل ، بشكل مستقل عن ذلك ، في الطب . وقد اكتشف أن سبب الكثير من الأمراض يعود إلى الأسلوب الخاطئ في طريقة الحياة .

قال عنه أرسطو إنه كان أقل دهاء من تالس في التجارة ، حيث خسر أمواله في بيزنطة من خلال الاحتيال، ويقول آخرون أنه سلب من قبل القراصنة . على أي حال قال هو نفسه إنه لم يندم على ما حدث بل بالعكس! اعتبر نفسه محظوظاً كونه ، ونتيجة لذلك ، تحول إلى دراسة الهندسة حيث توصل إلى نجاحات ملحوظة في هذا الاتجاه، فكانت الهندسة محظوظة أيضاً. (تعد هذه القصة نموذجية لما يعرف بالعصر الهيروي).

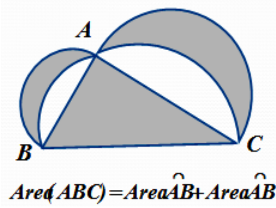
قال المؤرخ بروكلوس (Proclus) عنه: هيبوقراط هو الذي أنشأ عناصر الهندسة وقد سبق بذلك إقليدس بحوالي نصف قرن من الزمن، ولكن أقرب شيء نعرفه عنه هو نظرية النسبة بين الأوتار المتشابهة في الدوائر. وأهم ما يعزى إليه هو نظرية المربعات حول الأهلة (الهلال هو المنطقة المحصورة بين دائرتين مختلفتي القطرين (كما على الشكل).



هيبوقراط

ونص هذه النظرية هو:

نظرية : مساحة المثلث القائم الزاوية (الذي أطوال أضلاعه a و b و c) تساوي إلى مساحة الهلالين الناتجين من تقاطع الدائرتين، ذاتي القطرين a و b، مع الدائرة التي قطرها الوتر c.



وقد قيل أن برهان هذه النظرية هو أول برهان دقيق حول قياس المنحنيات في عالم

الإغريق ، ولكن يشك بهذا البرهان أن يكون دقيقاً في ذلك الحين، حيث يعزى أول برهان دقيق إلى أودوكسوس الذي ظهرفي كتاب العناصر لاقليدس.

تساؤلات



① كيف تستخدم خواص تشابه المثلثات لإيجاد بعد سفينة عن الشاطئ؟

② كيف نبرهن على صحة نظرية العكس لنظرية تالس الآتية:

"إذا كانت النقاط A,B,C واقعة على محيط دائرة وكانت الزاوية B قائمة كان AC قطراً للدائرة".

③ كيف نبرهن على صحة نظرية هيبوقراط حول الأهلة.

④ تعيش الطبيبة ، الطبية القلب ، ديانا في الجانب ذي الأرقام الزوجية من الشارع. مجموع أرقام المنازل من يسارها يساوي إلى مجموع أرقام المنازل من يمينها. بين أنه إذا كان عنوانها الرقم D وكان B عدد الأبنية في هذا الجانب فإن: $(2B+1)^2 - 2D^2 = 1$. بين مكان سكنها إذا وجد أقل من ٤٠ منزلاً بهذا الجانب من الشارع.

⑤ كيف يمكن لكأس الماء أن يكون عدداً؟ كيف كان فيثاغورث ليجيب على هذا السؤال؟

⑥ ماذا كان يعني فيثاغورث عندما كان يقول العدد أصل كل شيء ؟(All is Number) وكيف حطت أصمية العدد $\sqrt{2}$ من هذا القول؟

⑦ نعيش الآن في عصر الكومبيوتر – الديجيتال. هل يمكن اعتباره عصر فيثاغورث؟

⑧ كانت للأرقام ١، ٢ ، ٣ ، ٤ قيمة خاصة عند الفيثاغورثيين لدرجة أن قسم الفيثاغورثيين كان: "أقسم بإسم الرباعي المغروس في قلوبنا " من أين أتى هذا القسم برأيك ؟

⑨ حول دور الشخصيات في التاريخ يفضل الكثير من الباحثين التأكيد على أول المكتشفين لاكتشاف ما، ولكن هذا لايبدو أحيانا مهماً في حالة تاريخ الرياضيات كما لاحظنا في حالة الرياضيات المصرية والبابلية. علينا أن نتذكر أن أي مكتشف قد اعتمد على الذي قبله بشكل ما (الابن على والديه والتلميذ على أستاذه) . ولذلك نتساءل:عند مناقشة جزء من المعرفة الرياضية ما هو المهم:

أ- ذكر الشخصية المكتشفة؟

ب- ذكر الأرضية الثقافية الروحية أم التقنية؟

V الفصل الخامس

المدرسة الفيثاغورثية

انجازات الفيثاغورثيين ❶

بمجيء الفيثاغورثيين طرح برنامج اكتشاف تركيب الطبيعة الحاجة إلى الرياضيات. وقد كان الفيثاغورثيون مستغربين من أن بعض الظواهر التي لها أشكال فيزيائية متنوعة لها نفس العلاقات الرياضية . فالقمر والكرة المطاطية مثلاً لهما نفس الشكل وكثير من الصفات الهندسية الأخرى. وبالإضافة إلى نظرة الفيثاغورثيين على أن الرياضيات تمثل نظاماً كونياً واجتماعياً يفسر الطبيعة والحياة ووصفاً للنشاط الأدبي، فقد قدموا في هذه المادة إنجازات رياضية كثيرة وفي مجالات مختلفة منها:

١- برهان نظرية فيثاغورث والعكس .

٢- دراسة الوسط: آ- الحسابي، $\frac{a+b}{2}$ ب- الهندسي، $\sqrt{ab}$ ج- التوافقي: $\frac{2ab}{a+b}$.

٣- دراسة المجسمات الخمسة المنتظمة

٤- اكتشاف مفهوم مايعرف بالنسبة الذهبية من خلال تحديد نسب القطع المستقيمة الناتجة من تقاطع الأقطار في النجمة الخماسية المنتظمة ، المعروفة بنجمة فيثاغورث، إلى بعضها (هذه النجمة مثلت شعاراً للجمعية الفيثاغورثية).

٥- أصمية العدد $\sqrt{2}$ (استخدموا المعادلة $x^2-2y^2=1$ لإيجاد قيمة تقريبية له).

٦- نظرية الأعداد : الأعداد المثالية والأعداد المتحابة والأعداد المجسمة.

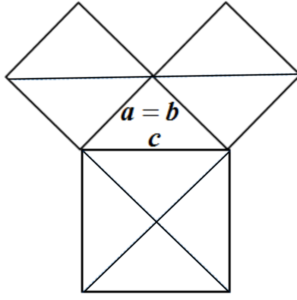
وسوف نعرض في الفقرات القادمة بعضاً من هذه الانجازات.

نظرية فيثاغورث ❷

من أشهر النظريات التي تعود لفيثاغورث هي نظرية فيثاغورث نفسها ، وبالرغم من أن هذه النظرية معروفة منذ ١٠٠٠ سنة قبل فيثاغورث إلا أنها عرفت باسمه لأنه أول من برهن على صحتها . وهذه النظرية تقضي بأن مربع الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي إلى مجموع مربعي الضلعين الآخرين: فإذا كانت a,b الضلعين القائمتين و c الوتر كان:

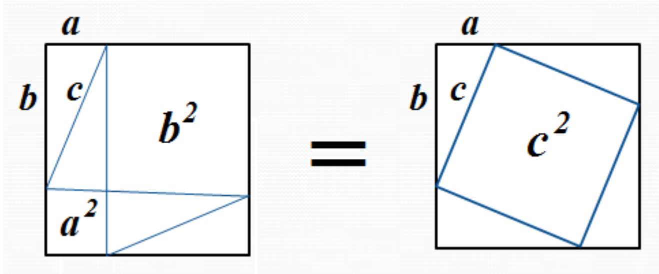
$$a^2 + b^2 = c^2$$

يعتقد أن فيثاغورث قد بدأ برهان النظرية من الحالة الخاصة التي يكون فيها المثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين ، حيث يحصل على صحتها مباشرة من الشكل ٤ (الجميل) .



شكل٤

ثم انتقل إلى برهان الحالة العامة أيضاً عن طريق الرسم ، الذي لا يقل جمالاً عن سابقه، وهو الشكل ٥ الذي لا يحتاج إلى تعليق .



شكل٥

وهناك براهين أخرى لهذه النظرية ظهرت في كتاب إقليدس " العناصر".

يعرف المثلث الذي تحقق أضلاعه a,b,c نظرية فيثاغورث بمثلث فيثاغورث وتعرف مجموعة الأعداد (a,b,c) بثلاثية فيثاغورث.

لقد وجد فيثاغورث أكثر من طريقة لإيجاد ثلاثياته . فمثلاً من المطابقة :

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

استنتج أن الأعداد $n+1,\ n,\ \sqrt{2n+1}$ تمثل ثلاثيات فيثاغورث عندما يكون المجموع

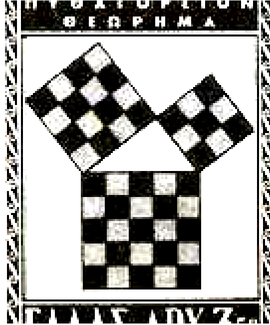
$$(n+1)+(n) = 2n+1$$

عدداً مربعاً . يعني ذلك أنه عند وجود عددين متتاليين يكون مجموعهما عدداً مربعاً فإن هذين العددين وجذر مجموعهما تمثل ثلاثية فيثاغورث (مثلاً ٥، ١٢، ١٣).

المثلث السحري ❸

يعد المثلث الذي أطوال أضلاعه ٣،٤،٥ من أشهر المثلثات التي تحقق نظرية فيثاغورث حيث تتحقق العلاقة (لاحظ أن $n=4$ في المتطابقة السابقة) :

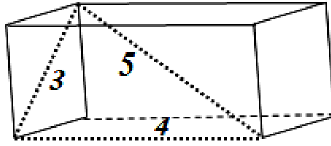
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$



المثلث السحري

ومما لاشك فيه أن البنائين ، قديماً وحديثاً ، استخدموا أبعاد هذا المثلث للحصول على زاوية قائمة. ولابد أن ذلك حدث قبل آلاف السنين في استخدامهم لبناء المعابد الرائعة في مصر وبابل والصين وبالتأكيد في المكسيك.

وليس من الصدفة ، مثلاً ، أن نرى نسب أضلاع هذا المثلث تظهر في القاعة الملكية للفرعون في الهرم خوفو، وفي معبد الشمس في بعلبك، حيث نلاحظ أن أبعاد هذه القاعة مرتبطة بهذا المثلث كما هو مبين على الشكل ٦.



شكل ٦

وقد كان لهذا المثلث قدسية خاصة عند الأقدمين حيث عرف بالمثلث السحري. فقد لاحظوا أن المحيط هو ١٢ والمساحة هي ٦ وهو رقم نصف المحيط والرقم التالي للأعداد ٣،٤،٥ . بالإضافة إلى ذلك لاحظوا أن :

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

لذلك فهو يعد ، بحق ، من أجمل المثلثات.

نظرية الأعداد ❹

أخذت الأعداد المتحابة والمثالية حيزاً هاماً في أعمال الفيثاغورثيين :

① **الأعداد المتحابة:** يكون العددان متحابين إذا كان مجموع قواسم الأول تساوي الثاني وبالعكس ، مثل العددين ٢٢٠ و ٢٨٤). كان أول من عرف مثل هذه الأعداد من اليونانيين هو فيثاغورث نفسه . وقد استنتج من خصائصها الرياضية تفسيرات لظواهر أخرى من روحانية أو اجتماعية. سئل فيثاغورث مرة من هو الصديق وما هي الصداقة؟ فأجاب الصديق هو أنا الثاني والصداقة هي كالعلاقة بين العددين ٢٢٠ و ٢٨٤.

② **الأعداد المثالية**: العدد المثالي هو العدد الذي يساوي إلى مجموع قواسمه ، مثل العدد ٢٨ لأن: $1+2+4+7+14=28$

من مآثر الفيثاغورثيين (وتحديدا أرخيتاس) ، في هذا المجال ، برهانهم على صحة النظرية الآتية:

نظرية(أرخيتاس)**:** إذا كان العدد $2^m - 1$ أولياً كان العدد الآتي مثالياً:

$$n = 2^{m-1}(2^m - 1), m > 0$$

وقد جاء البرهان الدقيق لهذه النظرية في كتاب إقليدس " العناصر".

③ **أعداد مرسين :** نلاحظ أن للأعداد $2^m - 1$ (التي تعرف بأعداد مرسين) أهمية خاصة لأنها تساعد في إيجاد الأعداد المثالية. فقد أوجد مرسين (Marin Mersenne 1588 - 1648م) الأعداد المثالية الثمانية الأولى من خلال الأعداد :

$$m = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31$$

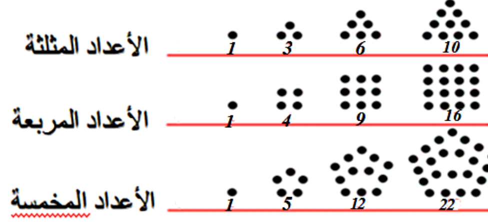
ولكن من غير المعروف فيما إذا كان هناك عدد غير منته من أعداد مرسين. غير أنه ، وباستخدام الحاسوب ، تم الحصول على ٢٠ عدد مثالي بواسطة هذه الأعداد (تم ذلك في نهاية عام ٢٠٠٠).

④ **العدد المثالي الأعظم**: لاحظ اليونانيون وجود أعداد مثالية تساوي إلى جداء قواسمها **!** يعرف كل عدد من هذا النوع بالعدد المثالي الأعظم . فمثلا العدد ٦ هو من هذا النوع ، لأن: $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ و $6 = 3 + 2 + 1$.

الأعداد المجسمة ❺

درس الفيثاغورثيون الأعداد الطبيعية والمثلثة والمربعة ...ألخ . تعرف هذه الأعداد بالأعداد المجسمة ، وسبب التسمية نابع من أن هذه الأعداد تأخذ أشكالاً مشابهة للمثلثات

أو المربعات... ألخ. فمثلاً تأخذ الأعداد المثلثة والمربعة والمخمسة الأشكال:

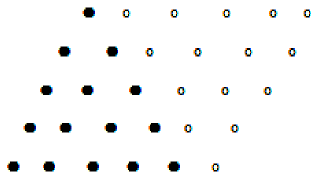


بالإضافة إلى ذلك فقد لاحظوا أن مجموع متتالية الأعداد الطبيعية يعطى بالعلاقة:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

وربما لاحظوا أن هذا القانون يمكن أن يوضح من خلال الشكل ٧ حيث يكون من اجل $n=5$:

$$1+2+3+4+5=\frac{4\cdot 5}{2}=15$$



شكل٧

كما لاحظ الفيثاغورثيون العلاقات الملفتة للنظر، بين الأعداد، مثل العلاقات:

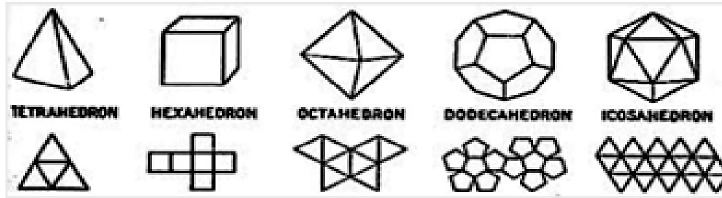
$$1+1=2$$
$$1+2+1=2^2$$
$$1+3+3+1=2^3$$
$$1+4+6+4+1=2^3$$
....

$$11^1=\ 1\ \ 1$$
$$11^2=\ 1\ \ 2\ \ 1$$
$$11^3=\ 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1$$
$$11^4=1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1$$
....

وغيرها من العلاقات الساحرة التي مثلت المدخل الرئيسي لنظرية الأعداد (لاحظ علاقة الأعداد السابقة مع مثلث باسكال الشهير).

المجسمات المنتظمة ❻

تعرف المجسمات المحدبة ذات الوجوه المنتظمة والمتساوية بالمجسمات المنتظمة (أو الكونية). وعدد هذه المجسمات في الطبيعة هو خمسة فقط وهي (شكل ٨):



شكل٨

- رباعي الوجوه المنتظم المكونة وجوهه من مثلثات متساوية الأضلاع).
- المكعب وهو المجسم المؤلف من ستة وجوه متساوية (مربعات).
- ثماني الوجوه المنتظم المحدود بثمانية مثلثات متساوية و متساوية الأضلاع .
- ذو الإثني عشر وجهاً المنتظم المحدود ب ١٢ مخمس منتظم.
- ذو العشرين وجهاً المنتظم المحدود ب ٢٠ من المثلثات المتساوية الأضلاع .

لقد عرف فيثاغورث نفسه هذه الأنواع من المجسمات المنتظمة باستثناء الرابع منها. وأول من اكتشف هذا المجسم هو هيباسوس (٤٧٠ ق م) الذي لم يعز اكتشافه هذا للمعلم ففصل من الجمعية الفيثاغورثية لهذا السبب.

أما حقيقة وجود خمسة مجسمات منتظمة في الطبيعة فقط فقد برهن عليها إقليدس في كتابه العناصر معتمداً على فكرة أنه إذا كان P مجسماً منتظماً ب q من الوجوه المنتظمة المكونة لأحد الرؤوس فإن مجموع الزوايا ، حول هذا الرأس، يجب أن تقل عن ٣٦٠ درجة.

لقد كان اليونانيون القدماء معجبين بالمجسمات المنتظمة الخمسة أيما إعجاب . وقد استطاعوا التوصل إلى الكثير من خواصها دون معرفتهم بالتحليل الرياضي أو علم

المثلثات . وفيما بعد وجد إقليدس في كتابه العناصر نسب الأقطار، في كل من هذه المجسمات ، إلى قطر الكرة المارة برؤوسه.

أما أفلاطون (الذي سنتحدث عنه فيما بعد) فقد كان له ، بالنسبة لهذه المجسمات ، نظرة أخرى متعلقة بتفسير التركيب الفيزيائي للكون.

تساؤلات



① كيف نبرهن على أصمية العددين $\sqrt{3}$ و $\sqrt[3]{2}$، برأيك أي منهما اكتشفت أصميته قبل الآخر ؟ علل ما تقول.

② بين أن العددين ٢٢٠ و ٢٨٤ متحابان.

③ أوجد العدد المثالي المكون من مضاعفات العدد ١٦

توجيه: نفرض أن العدد هو $16x$ فتكون مجموعة قواسمه: $1,2,\ldots,16,x,2x,\ldots,16x$

④ باستخدام برنامج على الحاسوب الشخصي يمكن الحصول على أول ١٢ عدد تام خلال بضعة ثوان بينما يتطلب الأمر بدون ذلك إلى مئات السنين من الحسابات. بين أن العدد ٨١٢٨ هو عدد تام وأوجد ما يسبقه من الأعداد التامة.

⑤ إذا كان ١٢٢٨٥ أحد عددين متحابين فأوجد الحبيب الآخر .

⑥ برهن على صحة نظرية أرخيتاس : وذلك من خلال فرض أن $p = 2^m - 1$ عدد أولي ثم أخذ قواسم العدد $n = 2^{m-1}p$

⑦ بين أن أي عدد مثالي ينتهي بأحد العددين ٦ أو ٨ .

⑧ بين أن حجم ثماني الوجوه المنتظم ذي الضلع ١ هو $\sqrt{3}/2$

⑨ ما هي مساحة سطح ذي ١٢ وجهاً المنتظم الذي يساوي طول ضلعه إلى الواحد ؟

⑩ ما هي نسبة الضلع إلى القطر في خماسي الأضلاع المنتظم (لا تستخدم الهندسة التحليلية أو علم المثلثات لأنها لم تكن معروفة في حينها)

①① كيف نستطيع بناء مجسم منتظم ذي ٢٠ وجهاً بقص مثلثات متصلة على الأقل من جهة واحدة من الورق المقوى؟

①②أخذت نظريات كثيرات الوجوه المنتظمة حيزاً مركزياً في الرياضيات الإغريقية. هل من الحق أن يحصل الإنسان على دكتوراه في الرياضيات دون أن يكون لديه أي فكرة عن كثيرات الوجوه المنتظمة ؟ ادعم إجابتك بأسباب مبنية على الهدف من الثقافة.

الفلسفة اليونانية

❶ The Heroic Age العصر الهيروي

تعرف الفترة قبل ظهور سقراط وأفلاطون بالعصر الهيروي. ففي هذا العصر (وتحديداً في القرن الخامس قبل الميلاد) حدثت فترة انعطاف كبيرة في تاريخ الحضارة اليونانية نتيجة لهزيمة الفرس أمام اليونانيين ثم هزيمة اليونانيين أنفسهم فيما بعد باستسلام أثينا إلى إسبارطة في نهاية ذلك القرن.

فقد تميزت هذه الفترة بعهد الإنجازات العظيمة في الأدب والفن فظهر أناس مثل:

- أناكساغوراس من شمال أيونيا مع اتجاه عملي للعقل.
- وزينو من شمال إيطاليا مع اتجاه فيزيقي قوي .
- وديموقراط من أبديرا مع نظرة مادية للعالم (تذكر أن فيثاغورث نظر إلى العالم بقيم مثالية وفلسفية للعلوم).

يعرف هذا العهد بعهد بيريكليس (Perecles) . يقال أن بيريكليس مات على أثر العدوى بالتيفوئيد التي عصفت باليونان، في عام ٤٣٠ ق م، وأودت بحياة ربع السكان . وبحسب الأسطورة فقد كانت هذه الكارثة مولداً للمسألة الشهيرة الرياضية (المطروحة سابقاً من قبل البابليين) وهي مضاعفة المكعب. وتقول الأسطورة أن اليونانيين قصدوا معبد أبوللو لطلب المساعدة، فكان الجواب أن عليهم مضاعفة الشعار المكعب للتمثال

(Cubical Alter of Apollo) ، ولما فشلوا في ذلك فقد حلت الكارثة. فقد كان على اليونانيين إنشاء الطول x الذي يحقق العلاقة $x^3 = 2$. وقد عرف اليونانيون إيجاد القيم التقريبية للعدد $\sqrt[3]{2}$ ولكن المشكلة كانت في الإنشاء الهندسي الذي يعطي نظرياً الطول الدقيق لهذا الجذر.

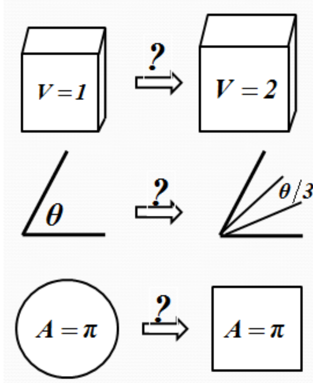
وفي هذا الوقت ظهرت مسألة أخرى وهي تثليث زاوية معطاة بواسطة المسطرة والفرجار. وقد سبقت هاتين المسألتين مسألة أخرى (عرفت من قبل أناكساغوراس) وهي مسألة إنشاء دائرة تساوي مساحتها إلى مساحة مربع علم طول ضلعه، وهي المسألة المعروفة بمسألة تربيع الدائرة والتي عرفها المصريون القدماء وحاولوا حلها أيضاً ، وقد أعيد طرحها من جديد.

وقد أصبحت المسائل الثلاث هذه أي المسائل :

١- **تربيع الدائرة**

٢- **مضاعفة المكعب**

٣- **تثليث الزاوية**



المسائل الثلاث الشهيرة

هاجساً عند الناس للحل في منتصف القرن الخامس ق م. وقد عرفت هذه المسائل بالمسائل الشهيرة في حقبة ما قبل التاريخ.

ولقد تبين بعد ٢٢٠٠ سنة استحالة حل أي من هذه المسائل بواسطة المسطرة والفرجار. وقد رافق محاولة الحل والفشل فيها تطور كبير في الرياضيات وفي مجالات أخرى كثيرة كالأدب والفلسفة.

المدرسة الإلياتية ❷

خلال تاريخ الفلسفة وجد تساؤل حول ماهية اللانهاية وهل هناك فعلا شيء لانهائي؟ والسؤال بشكل آخر! هل يوجد أكبر عدد؟ فقد كان تلامذة تالس أول من تصدى لهذا الموضوع وخصوصاً أناكسيماندر وبارمينيدس وزينو. وقد مثلت نظرتهم إلى العالم من حيث وحدة الأشياء وسكونها بما عرف، فيما بعد، بالمدرسة الإلياتية (نسبة إلى Elea) .

① **أناكسيماندر** (٦٢٠-٥٤٠ ق م Anaxemander) . يعد أناكسيماندر تلميذ تالس وتابع له. من أفكاره حول الطبيعة واللانهاية ما يلي:

- يوجد عدد غير منته من العوالم .
- النار والهواء والجماد (ليست من الماء) وإنما من اللانهائي .
- كل شيء مصنوع من اللانهاية وسيبقى إلى ما لانهاية.

وبهذه المبادئ مثل اتجاهاً فلسفياً عرف بالتعددية (Pluralism).

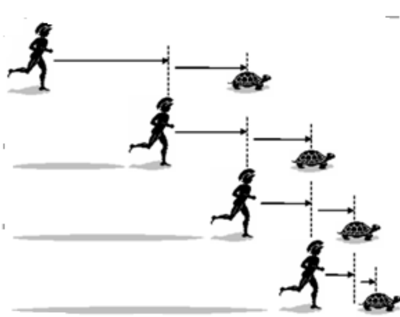
② **بارمينيدس** (٤٨٠ - ؟ ق م Parmenedes). هو من (أيليا– إيطاليا Elea) وهو أيضاً أحد تلامذة تالس ولكنه بعكس أناكسيماندر كان موحداً . وتتلخص أفكاره بما يلي:

١- يتألف العالم من مادة واحدة كاملة من جميع الجوانب.
٢- لا توجد حركة في الكون لأن الحركة تولد بداية شيء ونهاية آخر.
٣- فالأشياء ليست لانهائية الجريان (يتهيأ لنا وجود الحركة – الحركة هي خيال).

وبهذه المبادئ مثل اتجاهاً فلسفياً عرف بالوحدانية (Monism) .

③ **زينو** (٤٣٠ ق م Zeno). يعد زينو ، المعروف بزينو الألياتي ، من أشهر أتباع بارمينيدس، المؤيدين لفلسفته ، وممثلاً للمدرسة الإلياتية التي نادت بوحدة الأشياء وسكونها، كرد على أفكار الفيثاغورثيين الذين رأوا أن التعدد والتغير هو السمة الأساسية للفضاء المكون من النقاط واللحظات. ولكي يدعم فرضية معلمه بارمينيدس أعطى حججاً لإثبات عدم وجود التعدد والحركة . وفي سبيل إثبات ذلك اتبع طريقة ديالكتيكية ، سبق فيها أرسطو ، وهي البدء بفرضيات عكسية توصله إلى نتائج محيرة لا تصدق (Paradox) . وهذه الفرضيات صحيحة منطقياً إلا أنها تراوغ وتفر من مناقشة التفكير السليم . أشهر هذه الحجج هي الحجة المعروفة بسباق أخيل مع السلحفاة وهي:

أخيل والسلحفاة: العداء أخيل ومنافسه (الذي يؤخذ عادة على أنه سلحفاة) يتسابقان على طول المستقيم بحيث يبدأ أخيل في النقطة ٠ عندما تكون السلحفاة في النقطة مثلاً ١ . فإذا فرضنا أن سرعة أخيل ضعف سرعة السلحفاة فإن أخيل سوف يلحق بالسلحفاة في النقطة ٢ . ولكن زينو يقول بأن ذلك لن يحدث أبداً! فعندما يصل أخيل إلى مكان السلحفاة ١ ستكون السلحفاة في الموقع $1+1/2$ وعندما يصل أخيل إلى الموقع $1+1/2$ ستصبح السلحفاة في الموقع $1+1/2+1/4$. وهكذا ومهما كان عدد الخطوات n كبيراً فإن موقع أخيل $2-1/2^n$ سيبقى قبل موقع السلحفاة $2-1/2^{n+1}$. وبالرغم من الحركة الظاهرية لهما فإن أخيل لن يلحق بالسلحفاة أبداً .



أخيل والسلحفاة

بالإضافة إلى هذه الحجة يقدم زينو ثلاث حجج أخرى لإثبات عدم وجود الحركة، حيث يلاحظ أن جميع هذه الحجج تخضع للملاحظة الآتية:

- رفض اللانهاية + معطيات أخرى (بما فيها استمرارية الفضاء) يقتضي السكون.
- قبول الحركة + معطيات أخرى (بما فيها استمرارية الفضاء) يقتضي قبول اللانهاية.

لقد أوقع زينو معاصريه في حيرة كبيرة إذ كيف يمكن لأخيل أن لا يسبق السلحفاة؟ في الفيزياء الحديثة تعد الحركة مكونة من أخذ لانهاية من المواضع في لانهاية من اللحظات ولكن خلال مجال زمني محدد. ولكن وبقبولنا للانهاية فلن تكون حجج زينو مقلقة لاعتمادنا في تحليل الحركة على نظام الأعداد الحقيقية الذي يقبل بوجود المجموعات غير المنتهية من الأعداد .

ورغم التناقضات فقد كان لحجج زينو تأثير كبير على تطور الرياضيات و تأثير أكبر على الفلسفة اليونانية. ويظهر ذلك بوضوح في الأعداد غير العادية (المقابلة للأطوال غير المقيسة). فبعد أن كانت الكائنات الفيثاغورثية ترتبط بالأعداد تغيرت في عهد إقليدس لتصبح مرتبطة بنقاط وبقطع مستقيمة وظهر جلياً أن الهندسة ، وليس الأعداد ، تحكم العالم . وربما كانت هذه الحقيقة هي النتيجة الأساسية للحقبة الهيروية وكان الفضل في ذلك ، على الأرجح ، يعود لزينو وهيباسوس.

③ **ديموقراط** (٤٢٠ ق م Democritus) . هو من أبديرا (Abdera – شمال شرق اليونان) وقد تلخصت نظريته المعروفة بالنظرية الذرية فيما يلي:

- كل شيء مصنوع من الذرات.
- عدد الذرات لانهائي ومكان وجودها لانهائي .
- تحدث الأشياء عبثاً ودون هدف.

- بالرغم من أن الأشياء يبدو أنها تتغير ولكن لن ينتج أبداً شيء من لاشيء! (كانوا ينظرون إلى " لاشيء على أنه الفراغ)، الأمر الذي يعني أن اللاشيء هو شيء لأن الفراغ موجود على الأقل في ثلاثة أبعاد).

عرفت هذه النظرة إلى المادة بالسببية (Determinism).

اليونان قبل أفلاطون ❸

في الفترة مابين ٤٩٠ و٤٧٠ ق م توحدت أثينا بأسطولها البحري مع اسبارطة بجيشها القوي وانتصرت على الفرس بقيادة داريوس. ولكن وبعد الحرب عانت اسبارطة من ضائقة اقتصادية وتم تسريح الجيش بينما حولت أثينا أسطولها البحري إلى أسطول تجاري وبالتالي إلى ميناء ضخم وسوق كبيرة تجمع فيه رجال من جميع الأجناس فظهر التجار والأدباء والمحامون والعلماء والفلاسفة الذين أخضعوا المذاهب والعقائد لنظام العقل فكان من النادر أن تجد مسألة أو حلاً في فلسفتنا الحالية العقلية والمسلكية لم يتحققوا منه أو يتناولوه بالبحث. وفي السياسة انقسم الناس إلى مدرستين:

قالت إحداهما (مثلها فيما بعد جان جاك روسو) الطبيعة خير والمدنية شر! الناس متساوون بالطبيعة ، والنظم الطبقية المصطنعة هي التي فرقتهم إلى طبقات ، والقانون من اختراع الأقوياء ليحكموا به الضعفاء ، وهذا ما يمثل الديمقراطية كاتجاه للحكم .

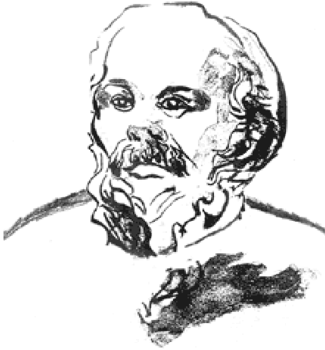
وقالت المدرسة الثانية (مثلها فيما بعد نيتشه): الطبيعة وراء الخير والشر والناس بالطبيعة غير متساوين وإن الأخلاق من اختراع الضعفاء لتقييد وكبح الأقوياء ، والقوة هي الفضيلة العليا ، وإن الدولة الارستقراطية هي الأفضل والأحكم (وطبعاً هذا يظهر الأقلية الموسرة في أثينا الارستقراطية التي تمثل حكم حزب الخاصة (أو القلة)) . فقد وصفوا

الديمقراطية بأنها عاجزة وضعيفة ومصطنعة وكاذبة . ولكن في الحقيقة لم يكن هناك ديمقراطية بالمعنى الصحيح لأنه من أصل ٤٠٠ ألف من السكان كان هناك ٥٠ ألفاً من العبيد و ١٥٠ ألفاً من الأحرار الذين ليس لهم تمثيل.

وفي الفترة ٤٣٠ – ٤٠٠ ق م عادت حليفة الأمس إسبارطة لتحارب أثينا ولتهزم الأسطول الأثيني. وعندما استسلمت أثينا كان شرط إسبارطة إعادة الارستقراطيين من منفاهم ، فعادوا وقامت الثورة بزعامة كريتياس ضد الديمقراطية ولكن الثورة فشلت وقتل كريتياس في المعركة. وكان كريتياس هذا تلميذاً لسقراط وعماً لأفلاطون.

سقراط المعلم والفيلسوف (٤٦٩- ٣٩٩ ق م) ❹ Socrates

في هذا الوقت كان سقراط يجتمع بالشباب والمتعلمين في حوارات مستمرة ، فيسألهم أن يحددوا كلامهم ويعرفوه ، فكانوا يستمتعون بتحليله وقدحه للنظام الديمقراطي في أثينا وفي رفضه للدين القديم المتعدد الآلهة. كان يمثل دعوة لتحرير الشباب من الخرافات والأساطير القديمة وكان يرى أنه باستطاعة الإنسان بناء نظام أخلاقي مستقل عن الدين يطبق على الملحد وعلى المؤمن على السواء. عندئذ قد تتغير الديانات دون أن يفرط الإسمنت الأخلاقي في المجتمع.


سقراط

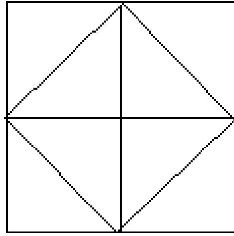
لقد جاء قبله فلاسفة طبعاً : فلاسفة أقوياء مثل تالس وهيراقليط ، وفلاسفة دهاة مثل بارمينيدس وزينو ، وعرافون مثل فيثاغورث وإمبادوكليس ، ولكنهم كانوا في الدرجة

الأولى فلاسفة طبيعيين . لقد بحثوا عن طبيعة الأشياء الخارجية ، عن قوانين العالم المادي . وبالرغم من إعجاب سقراط بهذه الفلسفة الطبيعية إلا أنه رأى أن هناك فلسفة أكثر جدارة من دراسة هذه الأشجار والأحجار التي تملأ الطبيعة، وحتى أهم من النجوم والكواكب وهي " عقل الإنسان"! ما هو الإنسان وما هو مستقبله؟ وكان يسأل من حوله: ماهي العدالة أو الحرية التي تتغنون بها؟ ماذا تعنون بكلمة الشرف والفضيلة والأخلاق والوطنية؟ لقد هاجم الديمقراطية لأنه رأى أن الحكومة تحكم ولا تساعد ، تأمر ولا تقود، ورأى أنه من المخزي أن يقوم على حكم الشعب الخطباء الذين يجيدون الأحاديث والخطب الطويلة والفارغة. لاشك أن الدولة تحتاج إلى أفكار أعظم الرجال وأعقلهم فقد قضى معظم وقته يفكر في السؤالين: ما هو معنى الفضيلة ؟ وما هي أفضل دولة؟

عندما فشلت الثورة – كما ذكرنا- وانتصرت الديمقراطية تقرر مصير سقراط (بسبب إجاباته على تساؤلاته السابقة) وحكم عليه بالإعدام.

وبقية القصة يعرفها العالم! لأن أفلاطون سجلها في نثر اشد روعة من الشعر أعلن فيه أول شهيد للفلسفة وحقوق الإنسان في حرية الأفكار. وفد عرض عليه بعض أصدقائه مهرباً سهلاً لكنه رفض بشدة ! فقد بلغ السبعين من عمره وربما اعتقد أن الوقت قد حان ليفارق الحياة وأنه قد لا يموت أبداً بمثل هذه الطريقة المفيدة لتدعيم مبادئه.

لم يكن سقراط رائداً في الرياضيات ولكن رسالته تمثلت في ظهور الشاب أفلاطون الذي تتلمذ على يده . أكثر ما يعرف عن سقراط ، في هذا المجال ، هو محاولته مضاعفة المكعب . سأل مرة أحد غلمانه أن يضـاعف المربع فحـــاول ذلك عن طريق مضاعفة الضلع! فوبخه وبين له بالرسم كيف يتم ذلك . كما يعرف عن



مضاعفة المربع

سقراط تعليقه المتــكرر: <u>عرف ما تقول</u> وقوله : <u>لا أعرف ســوى شيئاً واحداً هو أني لاأعرف شيئاً</u> .

وأخيراً وبعيداً عن الرياضيات نذر نفســه – كما ذكرنا - للبحث عن الخير والفضيلة.

أفلاطون- المدينة الفاضلة ❺ Plato

كان أفلاطون (٤٢٧-٣٤٩ ق م) تلميذاً لسقراط الذي مثل نقطة تحول جذرية في حياته. فقد وجدت روح أفلاطون الداهية بهجة شديدة في لعبة سقراط المنطقية الجدلية الممثلة بدحض البراهين واختراق الاعتقادات . ودخل أفلاطون إلى هذه الرياضة الذهنية التي كانت أشد خشونة من القتال في حلبة المصارعة.



أفلاطون

كان أفلاطون في الثامنة و العشرين عند موت سقراط ، وقد ترك هذا المصير المحزن أثرا كبيراً على كل تفكير التلميذ وملأه احتقاراً للديمقراطية وكرهاً للجماهير، فأمضى بقية حياته بالتفكير بأفضل دولة (غير الديمقراطية) يكون الحكم فيها للأفضل والأعقل بين الرجال. ولكن المشكلة كيف هي الدولة العادلة ؟ في الحكومة الأوتوقراطية يستولى على أملاك الآخرين ويغتصب الرجل أموال المواطنين ويحولهم إلى عبيد وبعدئذ نسميه أميراً وليس لصاً !

لكن الديمقراطية ليست أفضل حالاً !! لماذا عند شراء الثياب نبحث عن أحسن الخياطين وليس ألطفهم ؟ وعند المرض نبحث عن أفضل أخصائي وليس أوسم طبيب ؟ بينما في السياسة يصل أفضل مداهن إلى الحكم! وهذا هو حال الديمقراطية .

للحصول على شيء من العدالة فقد قال عنها السيد المسيح: هي اللطف نحو الفقراء، وقال نيتشه : هي شجاعة القوي ، بينما رأى أفلاطون أنها انسجام القوة مع الرغبات ! من هذا المبدأ ومن منبع السلوك الإنساني انطلق أفلاطون في بناء مدينته الفاضلة كما ورد في كتابه "الجمهورية" . هذا ويمكن أن يعد الجدول التالي أنموذجاً لهذا البناء:

منبع السلوك الإنساني

الرغبة	العاطفة	المعرفة
(الشهوة، الدافع)	(الروح الطموحة ، الشجاعة)	(العقل ، الفكر ، الذكاء)
⇩	⇩	⇩
العورة	القلب	الرأس
(الدافع الجنسي ، الغرائز)	(مسرى الدم وغطاء الرغبة)	(عين الرغبة والتحكم بها)
⇩	⇩	⇩
محتكرو الصناعة	المحاربون	الحكماء
(التنافس، حب التملك، البذخ)	(صانعو الجيوش والأساطيل)	(التأمل والتفكير)
⇩	⇩	⇩
يصلح للاقتصاد	يصلح للدفاع	يصلح للحكم

لقد سنحت لأفلاطون ، مرة، فرصة لكي يطبق نظريته ،عندما كان في إيطاليا ، وهو في سن الأربعين . فقد تلقى دعوة من ديونيسيوس الأول (Dionysius I) حاكم صقلية ، الذي أعجبته أفكار أفلاطون، للحضور وتحويل دولته إلى مدينة مثالية. وقد وافق أفلاطون من مبدأ أن تثقيف رجل واحد ، حتى لو كان ملكاً ، أسهل من تثقيف جميع الناس. وكانت الخطة تستدعي بأن يصبح ديونيسيوس فيلسوفاً وأن يتخلى عن كونه ملكاً . فنشأ بينهما نزاع مرير تم بيع أفلاطون ، على إثر ذلك ، إلى سوق العبيد . ولحسن الحظ فقد كان صديقه أرخيتاس الفيثاغورثي يعيش في صقلية وكان غنياً بما فيه الكفاية فأعتقه من العبودية وأعاده إلى أثينا ليؤسس هناك مدرسته التي دامت لأكثر من ٨٠٠ سنة.

بالإضافة إلى ما تقدم ، وعلى هامش بناء المدينة الفاضلة ، نجد في كتاب الجمهورية المحاورات الأفلاطونية المتضمنة المجاز الأفلاطوني وعلمه اللاهوتي وفلسفته الأخلاقية والأدبية والنفسانية التي مثلت كنزاً ثميناً في العالم . وفي كتابه هذا نجد معظم المشاكل التي واجهت العالم عبر العصور، من الشيوعية إلى الاشتراكية إلى الرأسمالية، ومبدأ مساواة المرأة بالرجل في الحقوق ، وتقييد النسل ، وعلم تحسين النسل، والمشاكل التي أثارها نيتشه الفيلسوف الألماني في علم الأخلاق والحكومة الارستقراطية، والمشاكل التي بحثها روسو الفيلسوف الفرنسي حول العودة في حياتنا إلى الطبيعة والحرية . كما نجد فلسفة بريجسون وفرويد. إنه وليمة للنخبة يقدمه ضيف كريم سخي. قال عنه (امرسون) إن أفلاطون هو الفلسفة والفلسفة هي أفلاطون، وأنعم على كتاب الجمهورية بكلمات عمر بن الخطاب عن القرآن عندما قال: احرقوا المكتبات لأن قيمتها موجودة في هذا الكتاب.

أفلاطون الفيلسوف ❻

من بعد سقراط اهتم أفلاطون أيضاً بالفلسفة والرياضيات وتحديداً بخمس مواد هي: الحساب – الهندسة المستوية - الهندسة الفراغية - الفلك – الموسيقى . فقد رأى أن الهدف

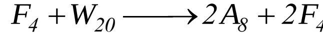
من دراسة الرياضيات هو الانسجام وتسامي الروح نحو الحقيقة والفضيلة.
ومن أفكار أفلاطون أنه كان واقعياً : الواقع موجود بغض النظر عن الفكر حيث اعتقد بوجود نوعين من الوجود:

- العالم المادي: مثل الشمس ، السرير ....وهو عالم يتعلق بالمتعة.
- العالم الروحي: مثل الروح، الدائرة ، الصدق ... وهو عالم الحكمة.

وكل ما هو مادي غير مثالي وكل ما هو غير مادي حقيقي وجيد. فقيمة الهندسة مثلاً لا تتمثل بالأشكال المرئية المرسومة بل بالأفكار المطلقة التي تملكها. ولكي تعرف قيمـــة المثالي (أو المثل) يجب أن تدرس الرياضيات. فنظرية الأعداد تعلم الحقيقة وهي تخص الفلاسفة ، والهندسة تعلم مفهوم الفضيلة وتخص الحكماء ، وعلم الحساب يعلم النظام ويهم العسكريين ورجال الأعمال (لتنظيم الصفوف وقيادة السرايا). وقد كانت هذه الأفكار هي المقدمة لبناء المدينة الفاضلة.
ومما يعزى لأفلاطون قوله: إن الحل النوعي للمسألة هو الدائرة بين المنحنيات، ولفته النظر إلى أهمية الوضوح في التعاريف والمسلمات . وقد شجع على دراسة الرياضيات كطريق نحو الفضيلة. فمثلاً يتعرف التلميذ بداية على الأشكال الهندسية ثم يفهم الدائرة فيرتقي إلى وعي الدائرة فيترفع إلى مستوى الفضيلة.

من هذا المنطلق لا عجب أن يكون لأفلاطون نظرة خاصة للمجسمات المنتظمة ، فهو نظر إلى الكيانات المادية في حالات كثيرة بروح المبدأ الفيثاغورثي كل شيء عدد . ومن وجهة النظر هذه فسر أفلاطون التركيب الفيزيائي للكون من خلال المجسمات المنتظمة الخمسة . فقد اقترن بالنسبة له المكعب بالأرض ، ورباعي الوجوه المنتظم

بالنار ، وثماني الوجوه المنتظم بالهواء وذو العشرين وجهاً بالماء ، وأخيراً ذو الإثني عشر وجهاً بالكون الكلي. ومن خلال ذلك مثلاً، فسر أفلاطون ظاهرة غليان الماء من خلال معادلة كيميائية يمكن كتابتها كما يلي:



$$F_4 + W_{20} \longrightarrow 2A_8 + 2F_4$$

وهذا يعني أن النار بأربعة وجوه مقترنة مع الماء بعشرين وجهاً تعطي ذرتين من الهواء (لكل منهما ٨ وجوه) وذرتي نار (لكل منهما ٤ وجوه) . لاحظ التوازن في المعادلة:

$$4 + 20 = 2 \times 8 + 2 \times 4$$

من الطبيعي أن لا يقبل الكيميائي المعاصر تفسير أفلاطون ولكنه يقبل فكرة الفيثاغورثيين حول إمكانية فهم الكون الفيزيائي بدلالة الأعداد الطبيعية (غير الكسرية) . لأن مثل هذه الأعداد ، للكيميائي المعاصر ، هي الأعداد الذرية للعناصر.

أفلاطون الرياضي ❼

يمكن القول إن أهمية أفلاطون في الرياضيات تنبع من مدى تأثيره على الآخرين . فهو لم يكن رياضياً بمعنى الكلمة ولكنه بدا صانعاً للرياضيين. بالإضافة إلى ذلك فإن أول ظهور للوثائق العلمية والرياضية كانت في عهد أفلاطون وما بعده.

فبعد إعدام معلمه سقراط لم تعد أثينا مكاناً آمناً لأفلاطون وأصبحت إقامته هناك محفوفة بالمخاطر . لذلك وبناء على نصيحة بعض أصدقائه غادر أفلاطون أثينا ، ربما إلى مصر ومن بعدها إلى إيطاليا. وقد كانت هذه فرصة مناسبة له تمكنه من مشاهدة العالم والتعرف

على الحضارات المختلفة. وبعد ١٢ عاماً عاد إلى أثينا ليؤسس مدرسة عام ٣٨٥ ق م جاء أتباعها من جميع أنحاء اليونان وقد كتب على بابها العبارة الشهيرة:

" لايدخل المدرسة من يجهل الهندسة ".

من أتباع هذه المدرسة:

①. **تيودوروس** (Theodoros) . كان التلميذ المدلل لأفلاطون وقد قدم إلى المدرسة من ليبيا ولكنه مات في معركة في عام ٣٦٩ ق م. هو أول من برهن على أصمية العدد $\sqrt{2}$ وكذلك أصمية جذور الأعداد ٣ ، ٥ ، ... ، ١٧ .

② **أودوكسوس** (٤٠٥–٣٥٥ ق م Eudoxos) . كان من تلاميذ الأكاديمية . عمل بالفلك والطب والجغرافية والفلسفة وفي الرياضيات حيث كانت إحدى نتائجه : " أن مساحة الدائرة متناسبة طرداً مع مربع قطرها" ثم برهانه على أن مساحة الدائرة تساوي إلى جداء نصف محيطها في نصف قطرها من خلال محاكمة إضافية أجراها بسطرين كما يلي: إذا كانت مساحة الدائرة أكبر من جداء نصف محيطها في نصف قطرها أو كانت أقل من ذلك ينتج تناقضات تحملنا على الاعتقاد بأن كل واحدة من هاتين الامكانيتين غير معقولة (نرى هنا برهاناً يستند على طريقة نقض الفرض) .

③ **ميناخيموس** (٣٥٠ ق م Menachemus). اكتشف أشباه المخاريط: عرف القطع الناقص على أنه تقاطع مستو مع مخروط قائم. واستخدم أشباه المخاريط لمضاعفة حجم المكعب . ولكي يفعل ذلك استفاد من الحقيقة أن نقطة تلاقي القطعين المكافئين

$$x = y^2 \ , \ y = x^2/2$$

تقع في النقطة التي ترتيبها $y = \sqrt[3]{2}$. وكان مأخذ أفلاطون عليه لماذا لم يستخدم الخطوط المستقيمة والدائرة ليفعل ذلك.

من الجدير ذكره أنه وفي عام ١٨٣٧م بين بيير ونتزل ((Piere Wantzel) وهو رياضي معروف بإدمانه على المقامرة والمخدرات) استحالة إنشاء قطعة مستقيمة مكافئة لـِ $\sqrt[3]{2}$ بالخطوط المستقيمة والدوائر.

أخيراً ميناخيموس هو الذي قال للإسكندر الأكبر: أيها الملك عبر البلاد توجد طرق للخاصة و طرق للعامة ! في الهندسة توجد طريق واحدة للجميع.

أرسطو (٣٨٤ - ٣٢٢ ق م) Aristotle

❽

ولد أرسطو في أستاغيرا (Astagera) ، وهي مدينة مقدونية تقع شمال أثينا.

تصور بعض القصص أرسطو مبعثراً للأموال التي ورثها في حياة صاخبة مما اضطره إلى الالتحاق في الجيش ليتجنب الموت جوعاً. وقد ساعدته الظروف فيما بعد للقدوم إلى أثينا ليدرس الفلسفة تحت إشراف أفلاطون لمدة عشرين عاماً.



أرسطو

كتب عن الأخلاق وطبيعة السعادة وعن الصداقة وكذلك أعطى مواصفات الإنسان المثالي (في الاعتدال). وهو يقول في ذلك إن الطريق لبلوغ السعادة هو سلوك الطريق الوسط (أو ما سمي بالوسط الذهبي) حيث تنظم الأخلاق في شكل ثلاثي يكون الطرفان الأول والأخير تطرفاً ورذيلة ويكون الوسط فضيلة. وهكذا يكون بين التهور والجبن فضيلة الشجاعة ، وبين البخل والإسراف فضيلة الكرم ، وبين الكسل والجشع فضيلة

الطموح... ألخ. عندئذ لا يختلف الصواب في الأخلاق عن الصواب في الرياضيات والهندسة . وقد كان مبدأ الوسط والاعتدال هذا يميز معظم المناهج الفلسفية اليونانية ولا عجب أن يضع الحكماء تقليد الاعتدال والوسط هذا في الذاكرة ،عندما نقشوا على معبد أبوللو في دلفي عبارة "لا شيء في إفراط" .

منطق أرسطو ❾

أكثر ما اشتهر به أرسطو هو ما يعرف "بالمنطق الصوري" وأهم ما أدخله على الفلسفة هو مذهبه في القياس، حيث قام في هذا المجال بما يلي:

١- استخدم المبدأ المعروف بالمذهب في القياس، الذي يتضمن مقدمة كبرى ومقدمة صغرى ونتيجة مثل: كل إنسان فان ، سقراط إنسان إذن سقراط فان .حيث يعتمد هذا المذهب على حـذف الوســـط .

٢- عمل في الاستنتاج المنطقي الذي يتلخص رياضياً بالصيغة:
" إذا كان A يؤدي إلى B و B يؤدي إلى C فإن A يؤدي إلى C "

٣- فرق بين البديهية Axiom الواضحة لكل الناس وبين المسلمة Postulate الخصوصية لفروع العلوم .

٤- عمل في الطريقة الاستقرائية (اعتمدها إقليدس بعده) وهي وضع مسلمات ثم البرهان على نظريات تعتمد كل خطوة فيها على المسلمة أو الخطوة التي قبلها.

٥- بحسب أرسطو كل واقعة تقع بدقة تحت إحدى الحقائق:
- حقيقية بالضرورة ، مثل ٢+٥=٧ .
- خاطئة ، مثل البقرة هي عصفور .
- مصادفة ، مثلاً فلان ولد في أثينا .

بالإضافة إلى ذلك فقد أقام مدرسة مشابهة لمدرسة أفلاطون ولكن في العلوم الطبيعية، حيث مثلت أول مركز علمي وبحثي متطور في التاريخ. وكان تحت تصرفه ١٠٠٠ رجل و٨٠٠ وزنة من المال (تعادل ربما ٥٠٠ مليون ليرة سورية حالياً) ساعدوه في العمل بالتصنيف الحيواني والنباتي وقام بدراسة منابع النيل كما عمل في الفلك . كل ذلك بدون أجهزة قياس (مثل : بارومتر – ميزان حرارة – مجهر) بل مكتفياً فقط بمسطرة وبوصلة. لقد وضع كتلة هائلة من الملاحظات والمعلومات وطاف في كل علم وجال بحرية في ميادين غير محدودة، وجرى طوعاً إلى النظريات والاستنتاجات، وبذلك فقد حلقت الفلسفة اليونانية وقفزت فوق مرتفعات لا يمكن بلوغها مرة ثانية لدرجة تخلفت بقية العلوم اليونانية وراءها. وقد يكون الخطر الذي يواجهنا في الوقت الحاضر مقابلاً لهذا تماماً ، إذ إن المعلومات المستنبطة تنصب فوقنا من كل حدب وصوب كحمم بركان وتكاد تخنقنا الحقائق المبعثرة غير المنسقة وعقولنا مفرقة بسبب زيادة العلوم وتفرعاتها التي أدت إلى الفوضى والاضطراب والبلبلة بسبب حاجتها إلى فكر متناسق وفلسفة موحدة.

أرسطو واللانهاية ⑩

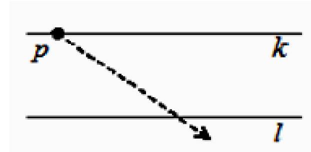
لقد أصر أرسطو على اعتبار أفكارنا عن هذا العالم نحصل عليها من خلال إدراكنا الحسي واعتقد أن حركة الأجسام الكبيرة مصممة تصميماً رياضياً والقوانين الرياضية وصف جيد للأحداث وبذلك يكون دافع عن التصميم الرياضي للطبيعة. فقد رأى أن كل شيء في العالم يتحرك بشكل طبيعي إلى تحقيق شيء معين. ومن بين الأسباب المختلفة التي تقرر حادثاً يكون السبب الأخير الذي يقرر الغرض أكثر الأسباب أهمية وحسماً. وبذلك يكون الهدف الرئيس للأحداث عند أرسطو هو المذهب الغائي: كل شيء يصبح له غاية في الكون .

من الملاحظ أن ميتافيزيقا أرسطو نشأت من علم أحيائه. كل شيء في العالم يحركه باعث داخلي ليصبح شيئاً أكبر مما كان عليه وكل شيء هو صورة لحقيقة نشأت عن شيء كان مادة لها والذي قد يكون بدوره مادة لصور اكبر تنشأ عنه. وهكذا فإن الرجل هو الصورة الذي كان الطفل مادة لها . والطفل هو الصورة التي كان الجنين مادة لها ، والجنين هو الصورة ، والبويضة هي المادة. وهكذا نعود إلى الخلف إلى أن نصل بطريقة غامضة إلى تصور المادة بغير صورة إطلاقاً، ولكن هذه المادة بغير صورة لا تكون شيئاً لأن كل شيء صورة. إن الطبيعة تمثل غزو الصورة للمادة والتقدم الدائم وانتصار الحياة.

من خلال نظرته هذه إلى الطبيعة والوجود يكون أرسطو مناقضاً لموقف زينو من الحركة ولكنه متفقٌ معه في رفضه لوجود اللانهاية . وقد كان لأرسطو حججه أيضاً ، في هذا الموقف ، نذكر منها:

الحجة١: ليكن ℓ مستقيماً غير محدود من الطرفين و k مستقيماً آخر ماراً من النقطة p ويدور حولها دورة كاملة خلال ساعة من الزمن (شكل٩).عندئذ سوف يوازي المستقيم k المستقيم ℓ كل نصف ساعة ولكننا لا نستطيع قطع مسافة غير منتهية في زمن منته ولذلك ℓ لن يكون غير منته.

شكل٩



الحجة٢: اللانهاية تؤدي إلى التناقض : فمثلاً مجموعة الأعداد الطبيعية N غير منتهية ومجموعة الأعداد الزوجية أصغر من N من حيث العدد ، لذلك مجموعة الأعداد الزوجية ستكون منتهية

الحجة3 : اللانهاية أضخم من أن تكون جميلة ولذلك يجب رفضها .

بحسب أرسطو ، إذن، يمكن للهندسي إنشاء قطع مستقيمة طويلة بقدر ما يشاء ولكن ليس إلى ما لانهاية.

أرسطو والاسكندر ❶❶


الاسكندر

كان والد أرسطو طبيباً وصديقاً للملك مينتاس جد الإسكندر الذي نصح أبنه الملك فيليب (أبو الإسكندر) بدعوة أرسطو إلى بلاطه لتثقيف الإسكندر وتعليمه الفلسفة والهندسة . لقد كان الإسكندر شاباً متوحشاً وكانت نزعته أقرب إلى الحرب منها إلى الفلسفة. فقد كان تواقاً للمعرفة ولكن بطريقة سريعة ومختصرة (ونتذكر جواب ميناخيموس له عندما سأله عن طريق مختصرة إلى الهندسة) . لذلك ، وبالرغم من احترامه ومحبته لأرسطو، فلم يتحمل المزيد من الفلسفة وذهب غازياً نحو الشرق قائلاً: لقد أفرطت في معرفة الأفضل أكثر من معرفتي بتوسيع سلطتي . وهكذا فإن عدم إيمان أرسطو باللانهاية، في الطبيعة، لم يمنع تلميذه من التفكير بالسلطات غير المحدودة على ممالك غير محدودة.

وبعد رجوع الإسكندر من الشرق وعودته إلى أثينا حدث شقاق بينه وبين أرسطو لاحتجاج أرسطو على إعدام ابن أخته ، الذي رفض أن يسجد للإسكندر (الذي فرض ألوهيته على الشعب ـ يبدو أنه تعلم هذا الطقس من الشرق) . ولكن ذلك لم يمنع الإسكندر من إقامة تمثال لأرسطو الأمر الذي زاد من سخط الأثينيين عليه فيما بعد.

وبعد موت الإسكندر فجأة عمت الفرحة في أثينا وقامت الثورة! فقد انتفضت الجماهير الغاضبة التي ألهبتها فصاحة ديمستين (Diomestin) النارية على الحزب المقدوني الحاكم ونادت بنفي أرسطو أو موته. وبالفعل ! فقد اتهم أرسطو بالخيانة وحكم عليه

بالإعدام ، ثم خير بين ذلك أو بالنفي خارج اليونان ، كما جرت العادة حينئذ هناك. وقد قبل بالنفي لكي لا يقال إن اليونان أعدمت اثنين من فلاسفتها ، على حد قوله . وبعد شهور

قليلة من تركه أثينا مات وحيداً ، على إثر المرض، في عام ٣٢٢ ق م وعمره ٦٢ عاماً. وفي السنة ذاتها شرب ديمستين ، ألد أعداء الإسكندر، السم وعمره ٦٢ عاماً أيضاً لأسباب غير معروفة. وهكذا ، وخلال اثني عشر شهراً ، فقدت أثينا حاكمها الأعظم وفيلسوفها الأِعظم وخطيبها الأعظم ، فكان ذلك أول الملامح على انزواء مجد اليونان وبزوغ فجر الرومان.

تساؤلات



① لاحظ هيبوقراط إنه بالإمكان إنشاء الطولين y و z المحققين لجملة العلاقات

$$1/y = y/z = z/2$$

يؤدي إلى إيجاد الجذر التكعيبي للعدد 2 . كيف نوضح ذلك ؟

② لأي القياسات الارسطوطاليسية تخضع المقولات الآتية:

١- $7 = 2 + 2$ ؟
٢- أرسطو كان تلميذاً لأفلاطون؟
٤- سافر مهدي إلى دمشق البارحة؟
٥- إذا وجدت أربع كرات في خمسة صناديق فهناك صندوق واحد فارغ على الأقل؟
٦- إذا وجدت ٥ كرات في ٤ صناديق فهناك صندوق واحد يحتوي على كرتين على الأقل؟

③ هل كان برهان زينو على عدم وجود اللانهاية ساذجاً (غير جدي) برأيك؟

④ برأيك كيف ستتغير القوانين فيما لو وجد أكبر عدد طبيعي؟

⑤ ماهي المنغصات التي سيلاقيها الرياضي عندما يعتمد على مجموعة من المسلمات من بينها المسلمة الآتية: لا توجد مجموعة غير منتهية ؟

⑥ لا توجد الأعداد خارج وعينا ولذلك هي لا تحتاج أن تكون انعكاساً لحالة مادية نهائية أو غير نهائية وبالتالي فهي تمثل حداً وسطا بين اللانهاية والنهاية. كيف تعلق على ذلك؟

⑦ كيف يمكن أن يكون جواب أرسطو لزينو في رفضه لوجود الحركة؟

⑧ لكل ظاهرة شكل ومضمون ! بالحواس نرى الشكل وبالعقل نرى المضمون . يقول أفلاطون: يعوض العقل أحياناً عن ألف عين لأن ما لانراه بالحواس نستنتجه بالعقل من خلال التفكير والتدريب (رؤية الظاهرة ثم فهم الظاهرة ثم وعي الظاهرة).
ولكن كيف نستخدم العقل ؟ وهل هناك من طريقة صحيحة للتفكير؟

VII الفصل السابع

عهد إقليدس

المتحف ❶

في الوقت الذي كان يسجل فيه أودوكسوس هذا النصر المبين على الإلياتيين وعلى فكرة اللانهاية، من خلال البرهان على مساحة الدائرة بطريقة النقض ، بدأت فتوحات الإسكندر الكبير التي كان امتدادها الشاسع يذكر باللانهاية التي تبتلع العالم الإغريقي القديم. وعندما سكنت ضوضاء السلاح نشأت في الإسكندرية عاصمة جديدة للثقافة اليونانية.

فقد فتحت الإسكندرية من قبل الإسكندر الأكبر ٣٣٢ ق م وجعلها بطليموس الأول عاصمته وفتح فيها جامعة في عام ٣٠٠ قبل الميلاد ، أسماها المتحف، ضمت مكتبتها ٦٠٠٠٠٠ ورقة وبقيت حتى فتحها المسلمون عام ٦٤١ ب م .



إقليدس

وقد كان الكرسي الأول في هذه الجامعة لإقليدس (٣٠٠ ق م Euclid) الذي كتب في البصريات والموسيقى والفلك. لم يكن إقليدس نفسه مجدداً كبيراً ولكنه كان منظماً ماهراً للنتائج الرياضية التي توصل إليها العباقرة الآخرون الذين عاشوا في العصر الذهبي للهندسة اليونانية . وقد كان إقليدس بارعاً جداً في إعادة براهينهم ، في جمل قصيرة

واضحة ، ثم جمعها في كتاب رائع واحد أسماه "العناصر- Elements" فاستطاع بذلك صهر الجهود التي بدأتها أجيال من الأدمغة في بوتقة واحدة . فقد بلغ من صفاء الأفكار، في هذا الإنتاج الفكري ، وحسن الأسلوب أن اعتبره بعض العلماء أحسن مجموعة من الأفكار والمحاكاة الدقيقة التي قام بها الإنسان على مر العصور . بالإضافة إلى ذلك فإن كتاب "العناصر" يعد أول كتاب رياضي في التاريخ، وما زالت مواده تدرس في المدارس حتى الآن. يتألف كتاب العناصر من ١٣ جزءاً جمعها إقليدس ورتبها ، وهو ليس صاحب أي منها ، وإنما تعود بغالبيتها للفيثاغورثيين أمثال أرخيتاس وهيبوقراط وأودوكسوس ...ألخ.

وقد أنجز إقليدس ذلك اعتماداً على طريقته التي عمل عليها وهي التنظيم المنطقي "للعناصر" بالبنية المسلماتية والحرص على أن يكون الاستقراء ناتجاً من أقل عدد من التعاريف والمسلمات مستخدماً ، أحياناً مبدأه الذي يقول: "ما قدم دون دليل، يمكن رفضه دون دليل" . هذه البنية التي خدمت نيوتن كثيراً ، في بناء مبادئه الفيزيائية في كتابه الشهير: المبادئ (Newton Principa) ، خدمت أيضاً سبينوزا في بناء أفكاره الاجتماعية التي تضمنها كتابه: الأخلاق (Spinoza's Ethics) .

لقد كان لكتاب العناصر أعظم تأثير عرفه كتاب في التاريخ. ومن المحزن القول إن بإمكان المرء ، حالياً، تحضير رسالة دكتوراه في الرياضيات دون أن يعرف أن إقليدس عاش في الإسكندرية ٣٠٠ ق م وأنه ألف كتاباً أسمه العناصر.

لقد حاول الإغريق باستخدام المسطرة والفرجار القيام ببعض الإنشاءات الهندسية منها:

- إنشاء طول يستوي $\sqrt[3]{2}$.

- تربيع الدائرة : إنشاء طول يساوي $\sqrt{\pi}$.
- إنشاء مضلعات منتظمة عدد أضلاعها ٧ - ٩ -١١- ١٣- ١٧، وقد فشلوا في ذلك والسبب استحالتها باستثناء الحالة ١٧.

وقد نجح غاوس (أو غوص Gauss) عام ١٧٩٦ (وعمره ١٨ عاماً) باكتشاف طريقة ينشئ بها ، بواسطة المسطرة والفرجار، المضلع ١٧ (لقد كان هذا أول تقدم في مسألة الإنشاء الإغريقية خلال ٢٠٠٠ سنة . هذا الأمر جعل غاوس ينذر نفسه للرياضيات) .

ولكي نتفهم الصعوبات التي عانى منها السابقون، لنتذكر أنه عندما نعمل بالهندسة، اليوم، فنحن مجهزون سلفاً بمستو وجملة إحداثيات ونقاط متقابلة مع ثنائيات الأعداد . أما إقليدس فقد كان أكثر ترشيداً. بدأ بنقطتين (مقابلتين للنقطتين $(0,1)$, $(0,0)$) ثم تابع الإنشاء نقطة بعد نقطة بحسب الحاجة. لقد كانت شروط الإنشاء صارمة:

١- إذا كان لديك A و B (نقطتان منشأتان) فتستطيع إنشاء قطعة مستقيمة $\overline{AB}$.

٢- إذا كان لديك $\overline{AB}$ مسبقاً و ٠ نقطة معطاة مسبقاً فتستطيع إنشاء دائرة $\left(0,\overline{AB}\right)$.

٣- إذا كان لديك $\overline{AB}$ مسبقاً فتستطيع تمديده في أي اتجاه بمقدار قطعة مستقيمة أخرى.

وهكذا ... علماً أن الطريقة الوحيدة المعتمدة للإنشاء هي القيام بالخطوات السابقة عدداً منتهياً من المرات. من هذه الخطوات ظهرت بدايات الهندسة الإقليدية.

الهندسة الاقليدية ❸

قال سقراط: عرف ما تقول!

وقال أرسطو: يحتاج المرء للقبول ببعض الوقائع كحقيقة .

من هاتين المقولتين استنبط إقليدس الطريقة المسلماتية التي تعد هيكلاً لما يعرف بالهندسة الإقليدية.

مثال: كيف أقنعك بالجدل العقلي أن القضية A_1 صحيحة ؟! علي أن أبين صحة متتالية من الحقائق التي تؤدي إلى القضية A_1 ، مثلاً، وفق التسلسل الآتي:

$$A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow A_3 \leftarrow .... \leftarrow A_n$$

حيث تعد A_n في هذه الحالة المسلمة التي نقبلها دون برهان وتعد A_1 القضية المعنية.

وتعرف الطريقة المسلماتية بأسلوب البرهان على صحة النتائج من خلال استنتاجات متتالية. في هذا الصدد تتطلب صحة الإقناع (أو البرهان) شرطين أساسيين:

آ – القبول بفرضيات أو قضايا دون شروط مسبقة

ب – القبول بالمنطق الرياضي كيف تنتج قضية من أخرى (وضع قوانين المنطق).

وفي سبيل ذلك عرض إقليدس طريقته من خلال ثلاثة أنواع من العناصر :

١- **المفاهيم الأولية** : التي يجب التعريف بها (وهي غير معرفة) وهي خمسة:
النقطة - الخط المستقيم – الانتماء – بين - تطابق

٢- **البديهيات** : وهي ثلاثة :

- المقداران المساويان لثالث متساويان فيما بينهما.

- إضافة (أو طرح) مقدار واحد إلى مقدارين متساويين يبقيهما متساويين.
- الكل أكبر من الجزء.

٣- **المسلمات :** وهي حقائق خصوصية بالعلم والهندسة وليست واضحة كالبديهيات وتعرف أيضاً بالموضوعات.

مسلمات إقليدس ❹

وضع إقليدس ٥ مسلمات (تعرف أيضاً بالموضوعات) هي:

١- أي نقطتين تحددان مستقيماً وحيداً.

٢- يمكن تمديد أي قطعة مستقيمة بمقدار معطى (هنا يتوجب تعريف القطعة المستقيمة)

٣- يمكن رسم دائرة معلوم مركزها ونصف قطرها.

٤- كل الزوايا القائمة متساوية (هنا يتوجب أيضاً تعريف الزاوية القائمة ويتم ذلك عادة بتعريف الشعاع المولد من نقطة ثم الزاوية على إنها المساحة الواقعة بين شعاعين مولدين من نفس النقطة).

٥- من نقطة خارج مستقيم يمكن إنشاء موازٍ وحيد (يقال عن مستقيمين إنهما متوازيان إذا كانا لا يلتقيان).

لا يفهم من تعريف التوازي تساوي المسافات بين النقاط المتقابلة، ولذلك كانت المسلمات الأربع الأولى مقبولة بعكس المسلمة الخامسة التي أثير حولها الكثير من الجدل ولمدة طويلة ، كما سنرى فيما بعد .

قوانين المنطق ❺

①**المبدأ الأول** : كل النظريات الرياضية مشروطة بالفرض الآتي:

إذا كان ....فإن .... (If ....Then......)

ويرمز لذلك بالرمز : (C ⇨ H) . كمثال على ذلك يمكن أن نأخذ القضية الآتية:

قضية١: تساوي ضلعين في مثلث .... يؤدي إلى ..... تساوي الزاويتين المقابلتين لهما

وبالإمكان التعبير لغوياً عن هذه الواقعة بشكل آخر مكافئ كما يلي:

قضية ٢ : زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متساويتان .

ولكن علينا أن نلاحظ أنه ليس كل قضية مشروطة هي نظرية فمثلا:

قضية ٣: إذا كان ABC مثلثاً كان هذا المثلث متساوي الساقين !!

هذه ليست نظرية ولا توجد خطوات لبرهانها أو عدم برهانها . ولكن نستطيع نقضها بإعطاء مثلث غير متساوي الساقين مثل المثلث الذي أطوال أضلاعه: ٣، ٤، ٥ .

②**المبدأ الثاني** : أساليب التحقق المسموح بها هي ٦ فقط:

① By Hypothesis …	**من الفرض**
② By Axiom ….	**من المسلمة**
③ By Theorem …	**من النظرية (مبرهنة سابقاً)**
④ By Definition …..	**من التعريف**
⑤ By Step …..	**من الخطوة**
⑥ By Rule … of Logic …..	**من قانون المنطق...**

ولا تقبل أي نظرية لا يتقيد برهانها بدقة بهذه الخطوات السابقة.

③**المبدأ الثالث** : نقض الفرض الذي ملخصه:

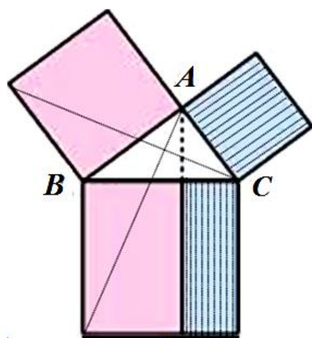
" إذا كان وقوع القضية A يؤدي إلى وقوع القضية B فهذا يعني أن عدم وقوع B يؤدي إلى عدم وقوع A ".
ويعبر عن ذلك رياضياً:

$$A \Rightarrow B \Rightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$$

باستخدام هذا المبدأ يمكن البرهان ببساطة مثلاً على صحة النظرية التي تقول: "المستقيمان المختلفان يلتقيان في نقطة واحدة فقط"

عظمة الأشكال 6

لعبت الأشكال دوراً هاماً في البراهين الهندسية عند إقليدس ، وكان استخدامها يؤدي إلى البساطة والجمال في البراهين . لبرهان نظرية فيثاغورث ، مثلاً ، أورد إقليدس أكثر من طريقة . ولكن فيما بعد (في الجزء الأول من كتابه العناصر) توصل للبرهان الرائع الذي يعتمد فيه على تساوي المثلثات ، الممثل بالشكل١٠، الذي يمتاز بتناسقه بحيث سمي بذيل الطاووس أو الطاحونة الهوائية (كما يسمى أحياناً بكرسي العروس) . على هذا الشكل يمكن ملاحظة أن الخط النازل من الرأس القائم للمثلث يقسم المربع ، المبني على القطر إلى مستطيلين يساوي أحدهما إلى المربع المبني على أحدى الضلعين القائمتين ويساوي المستطيل الآخر إلى المربع المبني على الضلع الأخرى.



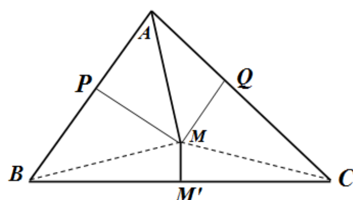
شكل١٠

وقد عرض إقليدس ، في كتابه العناصر، على الأقل ستة براهين لنظرية فيثاغورث اعتمد في جميعها على الرسم، بالإضافة إلى البرهان الهندسي الذي يعود إلى فيثاغورث والذي عرضناه في الفصل الرابع .

خطورة الأشكال ❼

بالرغم من الأداة الرائعة التي تمثلها الِأشكال في البراهين إلا أنها مخادعة أحياناً ولذلك يجب توخي الحذر الشديد عند استخدامها . فمثلا عندا يطلب من التلميذ المبتدئ رسم مثلث كيفي فقد يرسم واحداً، قريباً من القائم الزاوية، وفيما بعد يتناسى أن المثلث كيفي ويتعامل معه على أنه قائم الزاوية فعلاً .

لقد وعى إقليدس مبكراً هذا الأمر وأورد في كتابه العناصر - كمثال على ذلك- رسماً مخادعا يبين من خلاله أن كل مثلث هو متساوي الساقين. وإليكم الرسم (شكل١١)



شكل١١

التوضيح:في المثلث $\Delta(ABC)$ لتكن M نقطة تلاقي منصف الزاوية A مع المحور MM' على القاعدة BC . ولننشئ العمودين MP على AB و MQ على AC فنلاحظ أن :

أ) من تطابق المثلثين $\Delta(APM)=\Delta(AQM)$ ينتج تساوي الضلعين: $AP=AQ$

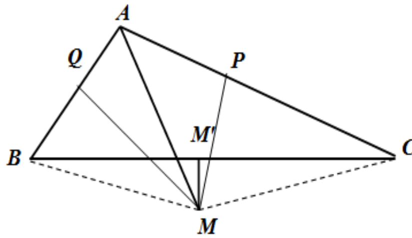
ب) ومن تطابق المثلثين $\Delta(MQC)=\Delta(MPB)$ ينتج تساوي الضلعين: $PB=QC$

بجمع الطرفين يكون :

$$AP + PB = AQ + QC$$

وعليه $AB = BC$ والمثلث متساوي الساقين

ولا يختلف الخداع إذا كان المثلث المعطى منفرج الزاوية (شكل ١٢).
يبقى عليك أن تكتشف الخديعة!



شكل١٢



تساؤلات

① كيف نرسم مخمساً منتظماً باستخدام المسطرة والفرجار؟

② لديك مستقيم و نقطة معطاة غير واقعة عليه. أوجد طريقة باستخدام المسطرة والفرجار لإنشاء مستقيم مار من هذه النقطة وعمودي على المستقيم المعطى.

③ إذا كان المضلع المنتظم ذو n ضلعاً يقبل الإنشاء باستخدام المسطرة والفرجار فإن المضلع المنتظم ذا $2n$ ضلعاً يقبل أيضاً الإنشاء باستخدام المسطرة والفرجار .كيف نوضح ذلك!

④ أنشئ المماس المشترك لدائرتين معطاتين.

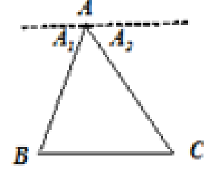
⑤ أنشئ، هندسياً، مستطيلاً تكون نسبة قاعدته إلى ارتفاعه مساوية للنسبة الذهبية .

⑥ كنموذج للمبدأ الثاني في قوانين المنطق، يمكن البرهان على صحة النظرية القائلة: "مجموع زوايا المثلث تساوي ٢ قائمة " كما يلي (شكل ١٣) :

١- من الفرض ABC مثلث قاعدته BC .
٢- من مسلمة التوازي يمكن إنشاء مواز وحيد من A .
٣- من نظرية سابقة $A_1 = C \,, A_2 = B$.
٤- من تعريف الزاوية المستقيمة $A_1 + A + A_2 = \pi$.
٥- من الخطوة ٣ يكون: $A_1 + A + A_2 = C + A + B$.
٦- من قوانين المنطق $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$

وهو المطلوب.
.باستخدام هذا الأسلوب برهن على صحة النظريات الآتية:

شكل١٣



آ) الزاويتان المحيطيتان المحددتان بوتر واحد من دائرة متساويتان

ب) مجموع الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري تساوي إلى ٢ قائمة.



تساؤلات

ج) إذا كان AB و CD وترين في دائرة متقاطعين في النقطة E فإن:

$AE \times EC = BE \times ED$.

د) إذا كان DB مماساً للدائرة في B وكان DAC قاطعاً للدائرة في النقطتين A,C فإن:

$DA \times DC = (DB)^2$.

⑦ تقول النظرية ١٢ في الجزء الثالث من كتاب العناصر: الخط الواصل بين مركزي دائرتين متماستين خارجاً يمر من نقطة التماس. وقد اعتمد برهان إقليدس هنا على الخاصة القائلة أن مجموع ضلعين في أي مثلث أكبر من ضلعه الثالث . كيف نبرهن على صحة ذلك!

⑧ كيف نبرهن، باستخدام مبدأ نقض الفرض، أن المستقيمين المختلفين يلتقيان في نقطة واحدة ؟

⑨على خريطة قديمة كتب ما يلي: إبدأ المشي من الكوخ وعد خطواتك حتى الصخرة البيضاء. اتجه يساراً وامش نفس العدد من الخطوات وضع سكينك في المكان. ارجع إلى الكوخ ثم عد خطواتك حتى الصخرة السوداء. اتجه يميناً وامش نفس العدد من الخطوات. الكنز موجود في منتصف المسافة بينك وبين السكين. لديك الخريطة ووجدت الصخرتين ولكن لا أثر للكوخ. كيف تحدد مكان الكنز؟

⑩ هل تعتقد حالياً بضرورة (أو بعدم ضرورة) تعلم طالب المرحلة الثانوية للهندسة الإقليدية؟

VIII الفصل الثامن

البنى الهندسية

❶ الاتجاهات في الهندسة

نعود لنسأل ! ما هي الرياضيات؟

الرياضيات مسلماتياً تمثل علاقات بين كائنات غير معرفة! مثلاً:

في الهندسة : لا نهتم بالنقطة أو المستقيم بل بالعلاقة بينهما .

وفي الفيزياء: لا يهم نوع المتحرك بل وصف الحركة (تحت تأثير الجاذبية مثلا).

وفي الشطرنج: ليس للقطع من معنى لولا القواعد التي تحكم نقلاتها . وكذلك في ورق اللعب لا يهم ورق اللعب بقدر ما يهم قانون اللعبة ، مع ملاحظة وجود ألعاب مختلفة باختلاف القوانين الموضوعة.

وكذلك الأمر بالنسبة للهندسة: توجد هندسات مختلفة باختلاف المسلمات الموضوعة. فقد تأكد هلبرت (Hilbert) من وجود الحاجة لتجريد الهندسة المألوفة ومفاهيمها إلى شكل آخر يصح فيه تعبير فاغنر(Vagner) : " يجب أن يكون الإنسان قادراً في أي وقت على وضع طاولات وكراسي وكؤوساً في مكان النقط والمستقيمات والمستويات"

وهنا من المفيد أن نلاحظ أن الإنسان يستطيع تدريب شعوره الطبيعي بالإحساس بالمفاهيم (حتى تصور الفضاء رباعي الأبعاد مثلاً) ويبدو ذلك واضحاً إذا قارنا لاعب شطرنج مبتدئ مع لاعب شطرنج متقدم حيث يركز الأول على حركات القطع بينما يركز الثاني عل خطط اللعب. وكذلك الأمر بالنسبة لمقارنة سائق سيارة مستجد مع سائق متمرس مثلاً

أثناء رحلة في الريف، حيث يكون تركيز الأول على الطريق بينما يستطيع الثاني مراقبة الطريق والاستمتاع بمناظر الطبيعة من حوله .

ونتيجة لذلك يبدو أن التفكير والتدريب يوسعان المدارك الحسية للشخص (وخصوصاً الطالب) لكي:

- يتعود على ما يلاقيه صعباً.
- يستطيع الربط بين ما هو مجرد وما هو حسي.

وإذا كان من الصعب تصور حقل القوى أو علاقة القوة بالمسافة أو "مفهوم ماكسويل" حول الموجات الكهرطيسية فإن التكنولوجيا الحديثة ، مثل الراديو والسيارة ، جعلت هذه المفاهيم أكثر شعبية في منازلنا.

من هذه الملاحظات كان منطقياً ظهور اتجاهات مختلفة في الهندسة مثل:

- الاتجاه المسلماتي
- الاتجاه التحليلي
- الاتجاه التجريبي.

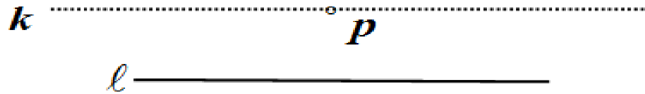
ولكل من هذه الاتجاهات طريقته الخاصة في بناء الهندسة. وقد كان موضوعنا هنا هو الاتجاه المسلماتي في الهندسة لعلاقته الوثيقة بتاريخ الرياضيات.

المسلمة الخامسة ❷

تعد الهندسة الإقليدية بعناصرها (المفاهيم الأولية والبديهيات والمسلمات) نموذجاً للاتجاه المسلماتي . من بين مسلمات إقليدس الخمس كانت المسلمة الخامسة (المعروفة أيضاً بمسلمة التوازي) أكثرها إثارة للجدل! والسبب في ذلك هو أن المسلمات الأربع

الأولى كانت قابلة للتحقق منها بالمسطرة والفرجار، أو بالتجربة، بينما لم يمكن التحقق من المسلمة الخامسة تجريبياً حيث يتوجب علينا - نتيجة لهذه المسلمة- أن نتخيل وجود مستقيم k يمر من النقطة p ولا يلاقي المستقيم l ولو بعد مليون سنة ضوئية .

والسبب الإضافي الذي سبب الجدل هو أن نقض مسلمة التوازي يبدو مخالفاً للإحساس أو للعرف العام (قال آينشتاين ذات مرة: الإحساس العام هو ما تربينا عليه وترسخ في ذاكرتنا حتى سن ١٨ وأصبح التخلص منه أو تجاوزه صعباً).



مسلمة التوازي

لقد شعر اليونانيون ومن بعدهم العرب والهنود أن الأفق غير بعيد وأن مسلمة التوازي دخيلة على النظام فاعتبروها نظرية يمكن البرهان عليها . فكانوا كمن صب الزيت على النار التي اشتعلت بالبراهين الفاشلة ولم تطفأ إلا بعد مرور ٢٠٠٠ سنة.

بالإضافة إلى إقليدس نفسه فقد حاول الكثيرون البرهان على صحتها مثل عمر الخيام ونصير الدين الطوسي وليجيندر وبروكلس و ساكيري وغيرهم. ولكن براهينهم (بالرغم من جمال بعضها مثل برهان ليجندر) كانت خاطئة لأنها كانت تعتمد على فرضية مخفية

تكافئ عادة المسلمة الخامسة نفسها. وفيما يلي بعض الصياغات المختلفة والمكافئة لهذه المسلمة:

- لا يمكن لمستقيمين متقاطعين أن يوازيا مستقيماً أخر .
- لا تتغير المسافة بين مستقيمين متوازيين (Proclus) .
- مجموع زوايا المثلث = ٢ قا (Legendere) .
- يوجد مثلث يشابه مثلثاً معطى (Wallis Postulate).

- يوجد مستطيل صغير بما فيه الكفاية (Clairut Axiom) .
- إذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاويتان من إحدى الجهتين أقل من قائمتين فإن هذين المستقيمين يتقاطعان من هذه الجهة (في مكان ما - Euclid).

في عام ١٧٦٣ قدم كليغل (Klugel) رسالة دكتوراه في الرياضيات بين فيها الثغرات في ٢٨ برهاناً مختلفاً للمسلمة الخامسة مما حذا بدالمبير(De Lambert) لكتابة مقال بعنوان :" فضيحة الهندسة" .

بداية النهاية ❸

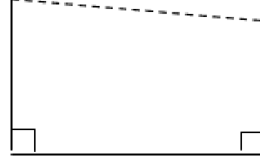
ساكيري (١٦٦٧-١٧٨٣ Saccheri) ومتابعة لمن سبقوه، واعتماداً على محاكمات نصير الدين الطوسي المتعلقة بزوايا الشكل الرباعي (أو شبه المنحرف القائم) ، حاول البرهان عليها بأن افترض أن المسلمة غير صحيحة وأراد أن يصل إلى التناقض بمناقشة ثلاث حالات:

١- الزاوية العليا قائمة

٢- الزاوية العليا منفرجة

٣- الزاوية العليا حادة

رباعي ساكيري



وقد وصل إلى التناقض في الحالتين ١ و٢ ولكنه لم يصلها في الحالة ٣ حيث تبين له، وبالحساب ، أن فرضية الزاوية الحادة مستحيلة (لأنها غريبة على طبيعة الخطوط المتوازية). وهو نتيجة لذلك وقع في حيرة من أمره ، وكان كمن اكتشف جوهرة ظاناً أنها فحم ، ولم يعِ أنه اكتشف الهندسة غير الاقليدية.

البنى الهندسية VIII

لقد كان المجري فراكاس بوليا (Frakas Polyai) ، ومن بعده أبنه يانوس بوليا (١٨٠٢-١٨٦٠ م Janos Polyai) ، آخر المحاربين في معركة البرهان على المسلمة الخامسة وكان ذلك في بداية القرن التاسع عشر. فبعد معاناة كبيرة كتب فراكاس إلى ابنه قائلاً: أنصحك يا بني بالابتعاد عن هذا الطريق الذي خطف مني الضوء في النهار، والنوم في الليل، والمتعة في الحياة. لكن الابن لم يستمع إلى نصيحة أبيه وتحذيراته، وكتب له في عام ١٨٢٣ رسالة ، بخصوص هذا الموضوع ، بعنوان " لقد اكتشفت من لا شيء عالماً غريباً جديداً" . كان فراكاس صديقاً للرياضي غاوس فأرسل له رسالة تتضمن نتائج أبنه يانوس، عن العالم الهندسي الغريب ، فكان جواب غاوس أن مثل هذه النتائج موجودة لدي وقد شغلت فكري منذ ٣٠ عاماً، وقد قررت ألا أنشرها لسببين:

الأول: إن العمل غير مكتمل تماماً.

الثاني: لأن العمل مخالف لأعراف الناس الذين ليس لديهم العمق الكافي لفهم النتائج.

صدم يانوش بالرد وعلق على ذلك بالقول: إن أسباب عدم نشر العمل ضعيفة وإن العلم لا يعرف المجاملات . وترك على إثر ذلك العمل بهذا الموضوع نهائياً. لقد كان يانوس بوليا شديد الحماس وناري المزاج . يقال إنه خرج من ١٣ مبارزة منتصراً بعكس الرياضي الفرنسي غالوا الذي خسر حياته ، في أول مبارزة، وهو في سن العشرين) .

بالرغم من المحاولات الكثيرة فلم يتمكن أحد من البرهان على المسلمة الخامسة حتى القرن التاسع عشر ، حيث تبين أخيراً استحالة ذلك. هذا الأمر أدى إلى ظهور الهندسات غير الإقليدية . وأحد أسباب هذا التأخر في ذلك يردَ إلى أن عدم القبول بالمسلمة الخامسة مناف للحس العام كما جاء على لسان الرياضي غاوس .

وقد أتت الضربة القاضية التي زعزعت الأساسات السابقة من قازان ، وهي مدينة روسية بعيدة في أسفل نهر الفولغا. وقد سدد هذه الضربة الرياضي نيكولاي لوباتشيفسكي

(١٧٩٣-١٨٥٦ Nicolai Lobachevsky) الذي كان أول من نشر عملاً متكاملاً في الهندسة غير الإقليدية عام ١٨٢٩. وقد وصلت نسخة من هذا العمل إلى العالم الرياضي غاوس الذي لم ير فيها (بالنسبة له) شيئاً جديداً . لأنه يقال في هذا الصدد أن غاوس كان أكثر الناس تصوراً لطبيعة الهندسة بعد إقليدس واستطاع أن يبني نظاماً هندسياً متسقاً تختلف فيه مسلمة التوازي عن مسلمة إقليدس . ولكنه لم ينشر نتائجه لتعارضها مع العرف الهندسي السائد والمتعارف عليه حينذاك . إلا أنه اعترف للوباتشيفسكي بها وأعزاها إليه ودعاه إلى ألمانيا. وقد تبين من خلال هذا العمل أن:

- مسلمة التوازي ليست حقيقة واضحة.
- مسلمة التوازي لا يمكن أن تكون نظرية.
- هناك نموذج هندسي متسق (منسجم) لمسلمات إقليدس بتبديل مسلمة التوازي.

والأهم من ذلك فقد تغير فهمنا للعالم المادي الذي نعيش فيه من خلال ظهور الهندسة الجديدة التي عرفت بالهندسة الهيبربولية (القطعية) حيث بدلت مسلمة التوازي بالمسلمة الآتية: من نقطة خارج مستقيم يوجد أكثر من مواز.

في عام ١٨٣٥ كوَن برنارد ريمان (١٨٢٦-١٨٦٦ B.Reimann) هندسة جديدة من خلال افتراضه أن الفضاء غير محدود ولكنه نهائي ، وبالتالي لا توجد خطوط متوازية . وقد تبين فيما بعد أن هذه الهندسة متسقة وأن لها نموذج هندسي هو الكرة ، حيث تمثل النقاط بنقاط واقعة على سطح الكرة والمستقيمات بالدوائر العظمى الواقعة على سطح هذه الكرة. لذلك تعرف هذه الهندسة بالهندسة الكروية.

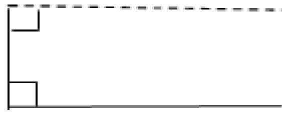
وبذلك انتهت التناقضات ! فقد تبين أن اتساق هندسة إقليدس يكافئ اتساق الهندسة غير الإقليدية وعليه فإن البرهان على المسلمة الخامسة مستحيل . ومنذ ذلك الحين أصبحنا

نسمع بأسماء الهندسات المختلفة وبالتالي بأسماء الفضاءات المختلفة مثل فضاء اينشتاين والفضاء الملتوي والفضاء الغامض ... الخ. وفي النهاية ونتيجة للموقف الجديد فإن الهندسات ، التي تعتمد المسلمات الأربع الأولى لإقليدس، تصنف ، بحسب موقفها من المسلمة الخامسة ، كما يلي:

- **الهندسة الإقليدية :**

: Euclid Geometry $\boldsymbol{E^2}$

<u>مسلمة التوازي</u>: يوجد مواز وحيد

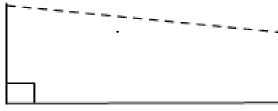


شكل مسلمة التوازي في الهندسة الإقليدية

- **الهندسة القطعية**

:Hyperbolic Geometry $\boldsymbol{H^2}$

<u>مسلمة التوازي</u>: يوجد موازيات

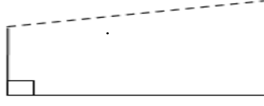


شكل مسلمة التوازي في الهندسة القطعية

● **الهندسة الكروية :**

: Spherical Geometry S^2

مسلمة التوازي:لا يوجد موازيات



شكل مسلمة التوازي في الهندسة الكروية

تساؤلات

① وصف هنري بوانكاريه نموذجاً للهندسة القطعية H^2 يتمثل بنقاط القرص المفتوح:

$$D=\{|z|<1\}=\{(x,y): x^2+y^2<1\}$$

مع تعريف المستقيم على أنه جزء من دائرة إقليدية متعامدة مع محيط القرص D :

$$C=\{(x,y): x^2+y^2=1\}$$

تساؤلات

ويقع طرفاه على هذا المحيط دون أن ينتميا إليه . كحالة خاصة يمكن أن يكون القطر في الدائرة مستقيماً (دائرة معممة) . وهي الحالة الوحيدة التي تمر فيها المستقيمات من المبدأ. ويكون المستقيمان متوازيين إذا التقيا في نقطة واحدة على الأكثر واقعة على محيط الدائرة

أ- ارسم الأجزاء التالية من الدوائر وحدد أياً منها يمثل مستقيماً في H^2 :

$$\ell_1=\{(x,y): y=3x\}\cap D$$
$$\ell_2=\{(x,y): 3x+y=1\}\cap D$$
$$\ell_3=\{(x,y): x^2+y^2+2x+2y+1=0\}\cap D$$

ب- تمثل المجموعات التالية مستقيمات في H^2 :

$$\ell_1=\{(x,y): y=x\}\cap D$$
$$\ell_2=\{(x,y): x^2+y^2-4y+1=0\}\cap D$$
$$\ell_3=\{(x,y): x^2+y^2+2\sqrt{2}x+1=0\}\cap D$$
$$\ell_4=\{(x,y): x^2+y^2+2x+2y+1=0\}\cap D$$

ارسم هذه المستقيمات وبين تقاطعها أو توازيها.

② كنموذج للهندسة الكروية يمكن أن نأخذ نقاط القشرة الكروية S^2 في الفضاء الاقليدي

$$S^2=\{x=(x_2,x_2,x_3)\in E^3 : \|x\|=1\}$$

مع اعتبار المستقيم ℓ دائرة عظمى ناتجة من تقاطع مستو مار من المبدأ مع محيط القشرة. باستخدام الجداء السلمي تكون معادلة المستقيم من الشكل:

$$\ell=\{x\in S^2 : \langle u,x\rangle=0\}$$

حيث u هو متجه الواحدة (يدعى u قطب المستقيم ℓ) . وتكون النقطتان p و q متعاكستين إذا كان $p=-q$.

بين أن:

أ- لا توجد مستقيمات متوازية في S^2

ب- المستقيمان المختلفان يلتقيان في نقطتين متعاكستين

ت- إذا كان u قطباً للمستقيم ℓ كان $-u$ قطباً له أيضاً

ث- إذا كان $p \in \ell$ فإن $-p \in \ell$ أيضاً.

ج- أي نقطتين غير متعاكستين تحددان مستقيماً وحيداً (استفد من الجداء المتجهي).

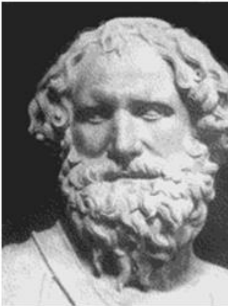
ح- اعط مثالاً لمثلثات تكون مجموع زواياها أكبر من قائمة.

③ كيف ستبدو أبعاد الفضاء في الهندسة المستوية عندما تكون العناصر الأولية ليست نقاطاً بل:
أ) مستقيمات؟ ب) دوائر؟ ج) قطوع مكافئة؟

IX الفصل التاسع

عهد أرخميدس

أرخميدس (٢٨٧-٢١٢ ق م) ❶ Archimedes


أرخميدس

أنتجت المدرسة التي وضعها أقليدس في الإسكندرية بعض الرياضيين من الدرجة الأولى أولهم أرخميدس.

جمع أرخميدس بين الذكاء الرياضي والعبقرية الميكانيكية فكان بحق أبا الهندسة العملية. وقد بلغ في مهنته منزلة عالية جعلت المؤرخين يصنفونه مع نيوتن وغاوس في مرتبة أكبر ثلاثة رياضيين أنجبتهم البشرية. فقد عمل في مواضيع متعددة مستخدماً ، في حالات

كثيرة ، التقنية التي نسميها اليوم بالتحليل. وقد كان مبدعاً في ذلك رغم الحدود الضيقة التي قيده بها النظام الأفلاطوني ورغم افتقاره إلى طريقة الاختزال الجبري وإلى جملة الرموز الصالحة لكتابة الأعداد الكبيرة ولإجراء الحسابات المعقدة. فهو أول من استخدم النهايات لحساب مساحات أشكال معينة مثل مساحة الدائرة . كما استطاع باستخدام تقنية التحليل (ودون استخدام التكامل) أن يبين أن حجم المجسم الناتج من تقاطع اسطوانتين متعامدتين نصف قطر كل منهما ١ هو ٣/١٦ . لذلك يمكن تسميته (بشيء من الحذر) أحد أسلاف حساب التفاضل والتكامل .

لقد عانى اليونانيون من عدم وجود وسيلة لكتابة الأعداد الكبيرة . فتغلب أرخميدس على هذه العقبة الكبيرة بأن اخترع جملة من الأعداد اساسها ١٠٠٠٠ والذي كان اليونانيون

يسمونه ميرباد . وسمى الأعداد ، الأكبر من ميرباد ، ميرباد مضروب بنفسه ميرباد مرة أي أصغر من :

$$100000000^{100000000}$$

وهي تعد "أعداد الدور الأول" ثم واصل تفكيره فجعل هذا العدد الأخير الهائل يضرب بنفسه ميرباد ميرباد مرة ، فوصل إلى عدد كبير جداً يكتب في جملتنا العشرية المألوفة كواحد بعده ٨٠ ألف مليار صفر. وقال أرخميدس إن هذا العدد الضخم كاف لأغراضه! فماذا كانت أغراضه يا ترى؟

وفي نظرية الأعداد وضع أرخميدس مسألة عرفت بمسألة قطيع جواميس إله الشمس ، وهذه المسألة هي:

مسألة القطيع: أوجد الأعداد الصحيحة x و y التي تحقق المعادلة:

$$x^2 - (8 \times 2471 \times 957 \times 4657^2)y^2 = 1$$

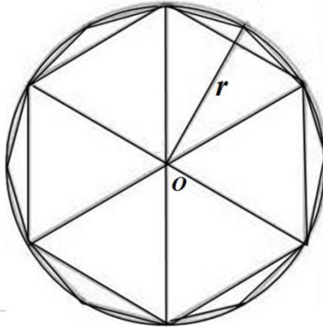
لقد حلت هذه المسألة بعد ٢٢٠٠ سنة وتحديداً في العام ١٩٦٥ حيث تبين باستخدام الكومبيوتر أن عدد جواميس قطيع إله الشمس إما أن يكون ٥٩١٦٨٣٧١٧٥٦٨٦ أو يكون عدداً آخر مكوناً من ٢٠٦٥٤٥ رقماً . وقد نشرت هذه النتيجة في مجلة علمية بعنوان:

H. L. Nelson , "A solution to ArchimedesCattle Problem " journal of Recreational Mathematics. V13(1965).

أرخميدس والهندسة ❷

تميز أرخميدس عن إقليدس بالأعمال الهندسية لأن أرخميدس كان يعرض طريقة الاكتشاف أو تحليل الوضع قبل الشروع في البرهان الدقيق. وقد كان ذلك واضحاً في كتابه "الطريقة" الذي تضمن حلول مسائل كثيرة منها:

① **مساحة الدائرة** : كانت أفضل طريقة توصل إليها اليونانيون لحساب مساحة الدائرة هي جمع أعداد لا متناهية من المثلثات مصفوفة حول مركز الدائرة. فتشبه الدائرة فطيرة عجين دائرية مقسمة إلى شرائح رقيقة جداً، وكان ارتفاع كل مثلث منها غير متناه في الضيق لينطبق على نصف قطر الدائرة ، ومجموع قواعدها اللامتناهية في الصغر يساوي إلى محيط الدائرة، وبما أن مجموع مساحات المثلثات يساوي جداء نصف ارتفاعها في مجموع قواعدها ، فلابد إذن من أن مساحة الدائرة تساوي إلى نصف قطرها مضروباً في المحيط . وهذه نتيجة صحيحة بالفعل ، إلا أن البرهان عليها بخطوات منطقية تدريجية كان رحلة فكرية شاقة لا تقل في صعوبتها عن رحلات سندباد ومغامراته. لاحظ أن المشكلة كانت في أن انطباق المثلثات على الفطيرة يعني الحصول على مثلثات بدون قواعد أي بدون مساحات إي عندما لا تعود تمثل شيئاً وعلى المجموعة غير المنتهية من " لا أشياء " أن تنتج شيئاً هو الدائرة.



شكل١٤

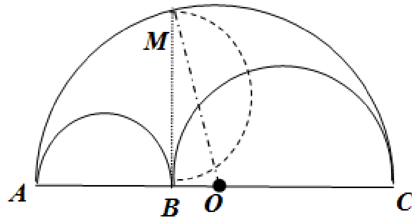
للبرهان على ذلك فقد استخدم أرخميدس - كما قلنا- مفهوم النهايات لحساب مساحة الدائرة ، كمضلع منتظم عدد أضلاعه غير منته (شكل١٤)، حيث بين أن مساحة الدائرة ذات نصف القطر r هي kr^2 وكان برهانه ، يبين في الوقت نفسه، كيف نجد مجموع سلسلة هندسية.

كان هذا العمل تتويجاً ل ٢٠٠ سنة من العمل بدءاً من عمل أنتيفون (Antiphon) الذي بدأه في عام ٤٢٥ ق م. (الجدير بالذكر أن أول من استخدم الرمز π للدلالة على الثابت k المتعلق بالعلاقة بين محيط الدائرة وقطرها هو ويليم جونز-W. Johnsعام ١٧٠٦ م).

②**<u>مسألة</u> <u>Arbelos</u>** (سكين الحذُاء) . لأرخميدس يعود حل المسألة المعروفة بمسألة أربيلوس الآتية:

لتكن B نقطة بين A وC ولنرسم الدوائر ذات الاقطار AB, AC, BC ومن جهة واحدة بالنسبة ل AC .(أربيلوس هي المنطقة بين الدائرة الكبرى والدائرتين الباقيتين (شكل ١٥) . تعرف أيضاً هذه المنطقة بسكين الحذُاء. لقد بين أرخميدس ما يلي:

نظرية: مساحة أربيلوس تساوي إلى مساحة الدائرة التي قطرها BM علماً أن BM هو العمود المقام على AC ويقطع الدائرة العظمى في M



شكل١٥

قصة الحمام ❸

تناهى إلى الملك هيرون أن الصائغ غشه في صياغة التاج ، بإضافة نسبة من الفضة إليه. فطلب الملك من صديقه أرخميدس تحري الأمر. وحدثت قصة الحمام عندما اكتشف فجأة طريقة لتحديد نسبة الذهب إلى الفضة في السبيكة. عندها ركض ، عبر شوارع سيراكيوز، عارياً وهو يصرخ (أويريكا، أويريكا) وجدتها ، وجدتها!

لم يكن غريباً أن يصادف اكتشافه لها في الحمام ! لنفرض أن :

m kg وزن التاج من الذهب

g كثافة الذهب

s كثافة الفضة

kg x كمية الذهب المحددة للصائغ

عندئذ سيكون حجم التاج :

$$v=\frac{x}{g}+\frac{m-x}{s}.$$

ما لاحظه إقليدس في الحمام هو أن ارتفاع نسبة الماء المزاح من (البانيو) يساوي حجم التاج v . بحل المعادلة هذه بالنسبة للمجهول x نعرف كتلة الذهب الموجودة في السبيكة.

بفضل هذا الاكتشاف استطاع أرخميدس أن يخبر صديقه الملك هيرون بنسبة الغش في التاج.

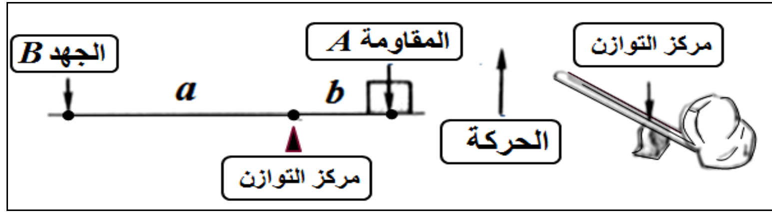
لقد أدت تحقيقات أرخميدس البوليسية ، المتعلقة بالتيجان والهيدروليك ، إلى إنجازات أخرى منها دراسة مادة جديدة تعرف بالهيدروستاتيك (Hydrostatic) ، وهو علم توازن

السوائل حيث يكون القانون الأساسي: مقدار الحجم الغاطس في الماء من جسم ما يساوي إلى حجم الماء المزاح.

سيراكيوز السفينة ❹

أول من استخلص نماذج رياضية لظواهر فيزيائية هو أرخميدس ! فقد اكتشف قوانين البكرات ودرس مراكز ثقل الأشكال مثل المثلث ، متوازي الأضلاع ... وغيرهما. وقد كان أول من اكتشف علاقة الذراع بالقوة . وهذه العلاقة تظهر على الشكل١٦ من خلال القانون: $a.A = b \cdot B$ (وهذا ما يذكرنا بلعبة الأطفال الموجودة في الحدائق) .

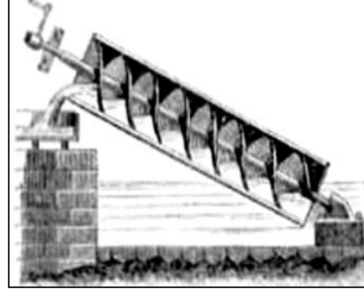
سيراكيوز المدينة ❺



شكل١٦

وقد كان يفخر بالقول: بالإمكان تحريك أي وزن! أعطني نقطة استناد لأحرك الأرض. سمع الملك هيرون بذلك فطلب منه أن يبين كيف يكون ذلك ؟ يقال إنه ، على إثر ذلك، صمم سفينة رائعة (اسمها سيراكيوز) محملة ب ٤٢٠٠ طن من الأوعية الفخمة وجعلها تتحرك بشدة حبل.

من مآثره أيضاً أنه صمم مضخة (مضخة أرخميدس) ، لرفع الماء ، استخدمها الفلاحون للري على ضفاف النيل وهي ما تزال تستخدم هناك، ولو على مستوى ضيق، حتى يومنا هذا.



مضخة أرخميدس

سيراكيوز المدينة ❺

عندما حاصر الرومان سيراكيوز ساعد أرخميدس في الدفاع عن المدينة لأشهر عديدة بأن صنع أسلحة متنوعة ، مثل آلات الرماية والخطاطيف والمرايا المقعرة التي جمع بها أشعة الشمس في بؤرة معينة مكنته من إحراق سفن الرومان بالإضافة إلى اختراع لواقط تستطيع رفع بواخرالعدو بواسطة قوى دافعة صغيرة ثم اسقاطها لتنقلب وجهاً على عقب.

لقد أرعب الرومان: فكانت تحدث بينهم بلبلة وذعر عندما يرون قطعة حبل أو قطعة خشب تقذف من خارج جدران المدينة.

عندما سقطت سيراكيوز في النهاية (ربما بسب الخيانة) طلب الجنرال الروماني مارسيلوس إحضار أرخميدس حياً له. ولكن أمره لم يطع، حيث قتل من قبل أحد الجنود لسبب غير معروف (ربما لأن القاتل رأى صديقه يموت على يد آلة أرخميدس أو لأن أرخميدس لم يمتثل لأمر الجندي)

تساؤلات

① لحساب مساحة القطع المكافئ على مجال معين (مسألة أودوكسوس) أنشأ أرخميدس مثلثات داخل

القطع محددة بهذا المجال ثم حسب مجموع مساحاتها بالقدر الذي أراد. وقد بين أرخميدس أن هذا المجموع يخضع للصيغة الآتية:

$$s = a + \frac{1}{4}a + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a + \ldots. + \left(\frac{1}{4}\right)^n a$$

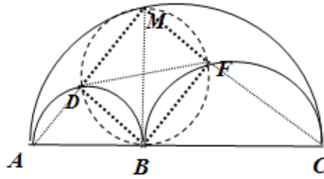
باستخدام هذه الطريقة احسب المساحة التقريبية للقطع المكافئ $y^2 = x$ على المجال $[0,4]$. (اكتف بخطوتين أوثلاث فقط من الصيغة) ؟

② برهن أن المضلع ذا m ضلعاً أقل ب $1 + 1/2^{m-2}$ مرة من مساحة الدائرة المرسومة داخله.

③ لنفرض أن كثافة الذهب هي $19300\, kg/m^3$ وكثافة الفضة $10500\, kg/m^3$ ولنفرض أن وزن التاج المصنوع من الذهب والفضة هو ٥ كغ . أعط صيغة تحصل من خلالها على كتلة الذهب في التاج بدلالة الحجم.

④ في مسألة السكين (Arbelos) نفرض أن الدائرة ذات القطر BM (العمودي على AC في B) تتقاطع مع نصفي الدائرتين على AB و BC في النقطتين D و F كماعلى الشكل١٧ . برهن أن:

١- النقاط M, D, A تقع على استقامة واحدة .
٢ - BM و DF متناصفان ومتساويان.
٣- DF مماس مشترك لنصفي الدائرتين على AB و BC ،



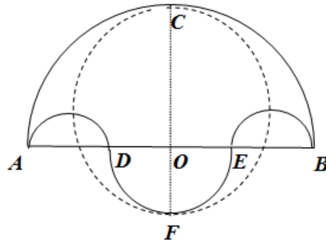
شكل١٧

تساؤلات

⑤ بين أن الدائرتين الماستين داخلاً للشكلين الناتجين من قسمة أربيلوس بالعمود MB متساويتان .

⑥ وضع أرخميدس مسألة مرتبطة بمسألة أربيلوس سماها سالينون (Salinon) وتعرف أيضاً بملح القبو. وملخص هذه المسألة هو:

لتكن AB قطعة مستقيمة ولتكن D و E نقطتين واقعتين عليها بحيث يكون: AD=EB ولنرسم أنصاف الدوائر ذات الأقطار AB, AD, DE, EB كما على الشكل. عندئذ ستكون مساحة المنطقة المحاطة بهذه الدوائر من الداخل (مساحة السالينون) مساوية لمساحة الدائرة المكون قطرها من محور التناظر FOC. كيف نبرهن على ذلك؟



شكل١٨

⑦ بين بالطريقة التي تجدها مناسبة أن حجم المجسم الناتج من تقاطع اسطوانتين متعامدتين نصف قطر كل منهما ١ هو ٣\١٦.

⑧ لو أن أرخميدس حياً اليوم . هل سيكون لا أخلاقياً بعدم مساعدة وطنه في اختراع الأسلحة ؟ ادعم إجابتك بأسباب مبنية على دور العلم في التاريخ.

⑨ يعد إقليدس ، أحياناً ، مكتشفاً للتحليل التكاملي! إلى أي مدى توافق على هذه المقولة؟

⑩ اعتمد إقليدس كثيراً على أعمال الآخرين ! إلى أي مدى يصح هذا القول في حالة أرخميدس ؟

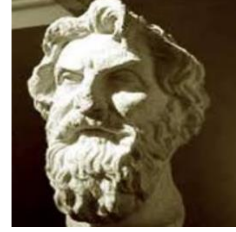
X الفصل العاشر

الفلك في اليونان

أريستارخوس(٣١٠-٢٥٠ ق م) ❶ Aristarchus

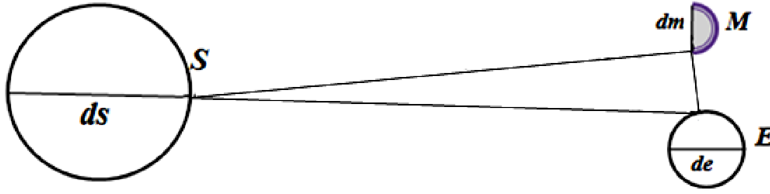
بالإضافة إلى أرخميدس فقد أنتج متحف الإسكندرية بعض الرياضيين المتميزين ، الذين استخدموا الرياضيات للوصول إلى إنجازات هامة في علم الفلك أولهم أريستارخوس (ومن بعده إراتوستينيس

وأبولونيوس وغيرهما) .



أريستارخوس

أريستارخوس هو من ساموس (هي نفس منبت فيثاغورث) . وقد كان فلكياً بالدرجة الأولى ! وكان أول من استخدم الرياضيات في الفلك . من تطبيقاته الهامة ، في هذا المجال ، مسألة حساب نسبة حجم الأرض إلى حجم القمر. وفي سبيل الوصول إلى ذلك لاحظ ما يلي:



شكل١٩

أريستارخوس ❶

عندما يكون القمر في ربعه الأول نستطيع رؤية الشمس والقمر في وقت واحد ويكون (على الشكل١٩): $\angle SME = 90^o$ (وهذا هو السبب لاقتصار رؤيتنا على نصف سطح القمر الذي يقابل الأرض). نتيجة لذلك استطاع أريستارخوس حساب الزاوية $\angle SEM$. وهكذا اكتشف ، وبدون استخدام تلسكوب أو سفينة فضائية ، ما يلي:

١- أن الشمس تبعد عن الأرض بمقدار ES/EM مرة بعدها عن القمر(ولكن الخطأ المرتكب كان كبيراً نتيجة عدم الدقة في القياس) .

٢- بمراقبة كسوف الشمس والزمن اللازم للحركة وجد أن

$$\frac{ES}{EM} = \frac{ds}{dm}$$

٣- بمراقبة خسوف القمر وظل الأرض عليه (بعد ملاحظة أن الحجم الظاهري للشمس يساوي الحجم الظاهري للقمر) استطاع أن يحسب نسبة حجم الأرض إلى حجم القمر .

وقد اعتمد أريستارخوس في عمله على الفرضيات الآتية:

١- الشمس والأرض و القمر كروية.
٢- تتحرك الأرض حول الشمس والقمر حول الأرض.
٣- الضوء يسير في خط مستقيم .
٤- ضوء القمر انعكاس لضوء الشمس.
٥- الكسوف ناتج عن حجب القمر لضوء الشمس على الأرض.
٦- الخسوف ناتج عن حجب الأرض لضوء الشمس على القمر.

على هذه الفرضيات اعتمد إراتوستينيس لحساب قطر الأرض.

إراتوستينيس (٢٧٥-١٩٥ ق م) ❷ Erathostenes

بعود موطن إراتوستينيس إلى سيرين (Cyrene) شمال إفريقيا ، وغدا زعيم الليبراليين في الإسكندرية. وقد عمل في فروع كثيرة. تابع أعمال أريستارخوس

واستفاد من فرضياته مستخدماً أيضاً الرياضيات في الفلك فتوصل إلى بعض الإنجازات أهمها:



إراتوستينيس

- حساب حجم الشمس والقمر بمقارنة الحجم الظاهري
- حساب المسافة إلى القمر
- حساب المسافة إلى الشمس
- حساب نصف قطر الأرض

سوف نبين ، اعتماداً على الشكل ٢٠ ، كيف توصل إلى حساب نصف قطر الأرض :

١- افترض أن أشعة الشمس متوازية لبعدها عن الأرض (أريستارخوس) .

٢- عرف أن مدينة أسوان تقع على مدار السرطان .

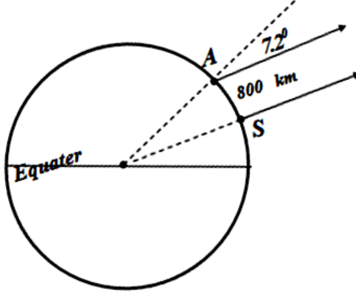
٣- هنا تكون أشعة الشمس عمودية ظهراً في ٢١ حزيران.

٤- في هذا اليوم يكون ميل الشمس على الإسكندرية ٧,٢ درجة.

٥- إذن قوس الزاوية بين الإسكندرية وأسوان عن مركز الأرض ٧,٢ درجة.

أبولونيوس ❸

٦- إراتوستينيس عرف المسافة من أسوان إلى الإسكندرية (وهذه المسافة تساوي بمعلوماتنا اليوم ٨٠٠ كم، ولكن كيف عرف هو ذلك ياترى؟)



شكل ٢٠

٧- استخدم نظرية اقليدس أن طول قوس الزاوية متناسب طرداً مع الزاوية.

٨- عرف عندئذ أن محيط الأرض هو:

$$\frac{360^{\circ}}{7.2}\times 800 = 41000\, km$$

٩- ومنه استنتج نصف القطر $6500\, km$.

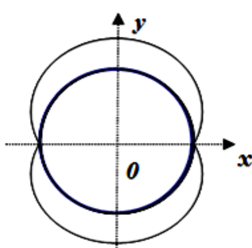
أبولونيوس (٢٦٢- ١٩٠ ق م) ❸ Apollonius


أبولونيوس

هو ابولونيوس من درغا (Derga – شمال تركيا) وهو منافس لأرخميدس ولا يقل ذكاء عنه. اشتهر في بدايته كفلكي ثم زادت شهرته كرياضي وخصوصاً بعد كتابه "أشباه المخاريط " الذي احتوى على ٤٠٠ نظرية تصف بشكل أساسي القطوع بأنواعها .

من الصعب اليوم أن نفهم كيف برهن أبولونيوس على صحة مئات النظريات الرائعة دون استخدام الرموز الجبرية الحديثة.

أهم ثلاثة أعمال له تتعلق بحركة الكواكب وكثيرات الوجوه المنتظمة والتحويل التناظري في الدائرة. وقد كان لهذه الأعمال الأثر الكبير على تطور الرياضيات اليونانية وانتشارها.



شكل ٢١

① **حركة الكواكب:** أول من افترض أن حركة الكواكب تتم وفق المنحني المعروف أبيسيكلوئيد (Epicycloids). صحيح أن المقولة خطأ ولكن تأثيرها على مستقبل علم الفلك كان كبيراً. والحالة الخاصة لهذا المنحني هو الكارديوئيد (Cardioids) (شكل ٢١)

② **كثيرات الوجوه المنتظمة:** إحدى النظريات الملفتة ، في هذا المجال ، هي النظرية الآتية:

نظرية : ليكن لدينا كرة مارة برؤوس كثيري الوجوه المنتظمة:

١) ذو ٢٠ وجهاً حجمه $V(A)$ ومساحة سطحه $S(A)$

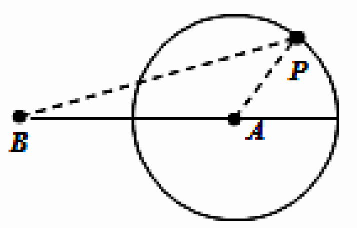
٢) ذو ١٢ وجهاً حجمه $V(B)$ ومساحة سطحه $S(B)$

عندئذ نسبة المساحتين تساوي إلى نسبة الحجمين! أي أن:

$$\frac{S(B)}{S(A)}=\frac{V(B)}{V(A)}.$$

③ **التناظر في الدائرة.** اكتشف أبولونيوس التحويل التناظري في الدائرة من خلال التعريف:" تكون النقطتان متناظرتين بالنسبة للدائرة إذا كان جداء بعديهما عن المركز مساوياً لمربع نصف قطر الدائرة". وطرح المسألة التالية:

مسألة أبولونيوس: لتكن A و B نقطتين ثابتتين في المستوي . أوجد المحل الهندسي للنقطة P التي تتحرك بحيث تكون النسبة $PA/PB = c$ ثابتة.



شكل٢٢

وقد أثبت أبولونيوس نفسه، فيما بعد ، أن الحل هو دائرة (تعرف بدائرة أبولونيوس- شكل ٢٢).

تعد أعمال أبولونيوس العظيمة تتمة لأعمال ميناخيموس في نظريات القطوع المخروطية ومقدمة للإنجازات التي سيقوم بها هيباركوس في الفلك.

هيباركوس (١٨٠- ١٢٥ ق م) ❹ Hipparchus

عاش هيباركوس معظم حياته في مدينة رودز التي مثلت، في ذلك الحين، ولاية إغريقية ومركزاً تجارياً مهماً يضاهي مدينة الإسكندرية. هناك مارس هيباركوس نشاطه الفلكي ، وكان أول من وضع نظاماً لحركة الكواكب تكون فيه حركة الكوكب مشابهة لحركة القمر في علم الفلك الحديث، (حيث يدور القمر حول الأرض بحركة دائرية تدويرية وتدور الأرض حول الشمس بنفس الوقت) وتكون الحركة في جميع الأحوال دائرية.



هيباركوس

ومن خلال هذا النموذج استطاع أن يصف ، بصورة جيدة ، حركة القمر والشمس وكذلك حركة خمسة كواكب أخرى كانت معروفة آنذاك. كما استطاع معرفة خسوف القمر قبل حوالي ساعتين من حدوثه.

وربما كان من أهم إنجازات هيباركوس هو اكتشافه لمبادرة الاعتدالين أو تقدمهما، الأمر الذي كان له تأثير مهم في علم الكون. فلقد توصل هيباركوس ، باستخدامه فهارس النجوم القديمة، إلى أن نقاط الاعتدال الربيعي (أي نقاط تقاطع خط الاستواء السماوي بالدائرة الظاهرية لمسير الشمس وبمستوى مدار الأرض) تتغير ببطء واعتدال مكملة دورة واحدة كل ٢٦٠٠٠ سنة . كما قدر طول السنة الشمسية ب ٣٦٥ يوماً و ٥ ساعات و ٥٥ دقيقة ، وهو أطول من الوقت الصحيح بمقدار ٦ دقائق ونصف الدقيقة.

بالإضافة إلى ذلك:

- سمي أبا المثلثات: فقد حسب الزوايا المتعلقة بالنظام البطليموسي لخطوط الطول والعرض.
- أول من شكل جداول تتضمن علاقة الزوايا بأطوال أقواسها وأوتارها ومن المحتمل أنه احتاجها لاستخدامها في حساباته الفلكية.
- يعد هيباركوس جسراً بين الفلك البابلي وفلك بطليموس.

تساؤلات

① لتكن A و B نقطتين ثابتتين في المستوي . أوجد المحل الهندسي لنقطة P التي تتحرك بحيث يكون PA/PB = ٢ .

② لنفرض أنك تعرف قطر القمر . ماهي أبسط طريقة لإيجاد المسافة من الأرض إلى القمر بدون استخدام أدوات لم تكن بحوزة إراتوستينيس.

تساؤلات

③ برهن على صحة نظرية أبولونيوس القائلة: المحل الهندسي للنقاط التي يكون فرق مربعي بعديهما عن نقطتين معلومتين ، ثابتاً ، هو مستقيم عمودي على منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين.
الجواب:معادلة المستقيم هي:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + y_1^2 - y_1^2 + x_1^2 - x_1^2 = c$$

علماً أن إحداثيات النقطتين هما: $(x_1, y_1),(x_2, y_2)$

④ لنفرض أن القمر ممثل بالمعادلة

$$x^2 + y^2 = 1$$

وظل الأرض عليه ممثل بمعادلة الدائرة المارة من النقاط

$(0,0)$, $(-0.1364,\mp 0.9907)$.

والمطلوب هو إيجاد نسبة قطر الأرض إلى قطر القمر.

⑤ بمعرفة نسبة مسافة الشمس إلى القمر عرف هيباركوس أن قطري الشمس والقمر يخضعان لنفس النسبة. وهذا نابع من الحقيقة أن الشمس والقمر يظهران بنفس الحجم تقريباً للعين المراقبة. أي أن زاوية الرؤيا هي واحدة. وقد استنتج أريستارخوس (من خلال مراقبة الكسوف)أن هذه الزاوية تقدر ب ٢ درجة. أي مسافة قمرية تستنتج من ذلك؟

⑥ كيف قدر اراتوستينيس المسافة من أسوان إلى الإسكندرية برأيك؟

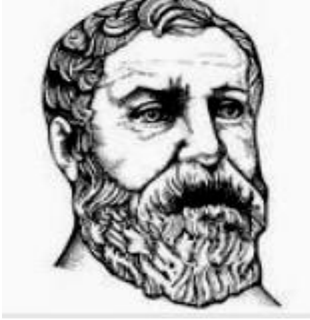
⑦ قيل أن بوسايدونوس وجد طريقة لتقدير حجم الأرض من خلال مراقبة النجوم. كيف يمكن أن يحدث ذلك؟

⑧ لقد ارتبطت أسماء أرسطو وإقليدس وأرخميدس وأبولونيوس بأسماء أربعة من القادة العظماء هم، على الترتيب ، الإسكندر وبطليموس وهيرون وأتالوس ! اذكر مكان وزمان هذه القادة وما مدى ارتباط أسمائهم بأسماء هؤلاء الرياضيين.

XI الفصل الحادي عشر

النهايات اليونانية

❶ Heron — هيرون (١٠ - ٧٦ م)



هيرون

عاش هيرون في الإسكندرية في القرن الأول بعد الميلاد. عمل بالقياس في الميكانيك وفي البصريات وفي المثلثات وحتى في الخطوط الجيوديزية. ولكن معظم كتاباته الأصلية وتصاميمه فقدت ولم يبق منها إلا ما تم حفظة في المخطوطات العربية. من إنجازاته:

① **صيغة هيرون:** أهم ما يعرف عنه في الهندسة هو صيغته في حساب مساحة المثلث المعروفة بإسمه:

$$A = \sqrt{d\,(d-a)(d-b)(d-c)}$$

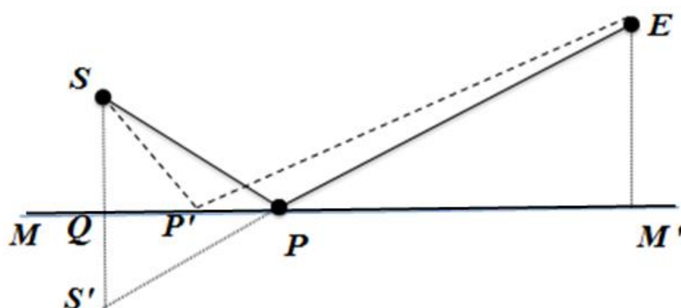
علماً أن a و b و c أطوال أضلاع المثلث و d نصف محيطه . وقد قام العرب بإخطار الأوروبيين أن هذه الصيغة هذه كانت معروفة من قبل أرخميدس إلا أن أول برهان مسجل عليها هو برهان هيرون.

② **كثيرات الأضلاع:** متابعة لما قام به البابليون ، في دراسات كثيرات الأضلاع، يلاحظ أن لهيرون أيضاً انجازات في هذا الموضوع . فقد وضع ، مثلاً ، جدولاً بمساحات

❶ هيرون

كثيرات الأضلاع المنتظمة التي لها عدد محدد من الأضلاع وأعطى كلاً من هذه المساحات بدلالة مربعات الأضلاع . وقد كانت بعض نتائجه متوافقة مع نتائج البابليين وبعضها غير متوافق. ولكن أعماله ، كأعمال البابليين، لم تكن كاملة حيث توصل كل منهما إلى نصف الحقيقة فقط ، حيث كمن النصف الثاني، من الحقيقة ، في وجود أعداد غير عادية بين نسب الأضلاع المدروسة. والحقيقة الكاملة هي أن النسبة الصحيحة هي بالتحديد عدد أصم.

③ **المسار الأمثل:** لقد كان معروفاً قانون انعكاس الضوء لكل من أرسطو وإقليدس وربما لأفلاطون. ولكن هيرون بين، بحجة هندسية بسيطة، أن انعكاس الضوء يخضع للقانون الأرسطوطاليسي الذي يقول: إن ظواهر الطبيعة تعمل بالطريقة الأبسط . هذا يعني أنه حتى يسير الضوء من المنبع S إلى المرآة MM' ومنها إلى عين المراقب E فإن أقصر مسار ممكن (وبالتالي أبسط ممر) هو SPE (شكل٢٣) ، وهي الحالة التي تكون فيها الزاويتان SPM و EPM' متساويتين . لاحظ أن E و P على استقامة واحدة مع S' نظير المنبع الضوئي S بالنسبة للمستقيم MM'. يعني ذلك عدم وجود مسار آخر أقصر(مثل المسار $SP'E$ مثلاً).



شكل ٢٣

لقد أعطى هيرون وصفاً جيداً لما يعرف بالمحرك البخاري (الذي يعرف أحياناً بمحرك هيرون). والمبدأ هو استخدام الماء في درجة الغليان لتوليد الحركة الميكانيكية . ولكن هذه الفكرة لم تطبق بشكل فعلي قبل أواخر القرن الثامن عشر، حيث استطاع جيمس واط James Watt ،في عام ١٧٨١، من تصنيع محرك بخاري ينتج حركة دورانية مستمرة في أي مكان يوجد فيه وقود يولد طاقة حرارية (فحم ، خشب، شلالات مياه ...). لقد كانت نقطة تحول تاريخية هامة نحو الثورة الصناعية الكبرى.



محرك هيرون

بطليموس الثاني (١٠٠- ١٧٨ م) ❷ Ptolemus II

ما بعد عهد أرخميدس خف بريق الإشراق الإغريقي في الرياضيات وفي بقية العلوم وخصوصاً بعد الميلاد . وبعد هيرون لم يظهر إلا القلائل فقط من الرياضيين منهم بطليموس الثاني وديوفانتوس وبابوس.

كان بطليموس الثاني أقرب إلى الفلكي وقد عمل (متابعة لهيباركوس) في المثلثات وفي الجداول المثلثية بالإضافة إلى جداول تتضمن تصنيف مواقع النجوم. من الأعمال الهامة لبطليموس الثاني تأليفه لكتاب "الماجست " وإنجازاته في الهندسة والجغرافيا.

❷ بطليموس الثاني

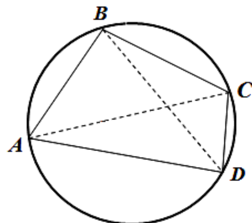
① **الماجست** (Almagest): تنبع أهمية هذا الكتاب من بقائه عبر الزمن ، أولاً، ثم تضمنه على تلك المعلومات القيمة ، في علم المثلثات والفلك، ثانياً . فقد عرض في هذا الكتاب شرحاً أصيلاً عن نظرية مركزية الأرض التدويرية ، سميت بالنظرية البطليموسية. وقد كانت مقبولة عند الناس لفترة طويلة بحيث أصبحت حقيقة مطلقة وكانت الجواب الأخير لمسألة أفلاطون ، حول ظهور الأجسام السماوية ، وتم النظر إليها كحقيقة علمية عظيمة. وبإكمال بطليموس لعمل هيباركوس يكون الدليل حول النظام الرياضي للكون قد تم بدرجة عالية من الثقة والدقة . كل ذلك بالرغم من رفضه لنظرية إريستارخوس حول مركزية الشمس (رغم تفهمه لها) . وقد كانت حجته في هذا الرفض أن حركة أي جسم يجب أن تتناسب مع كتلته.

② **الهندسة:** في كتاب الماجست ترد أيضاً مسائل هندسية ونظريات كثيرة منها مثلاً النظرية المتعلقة بالأوتار في الدائرة وهي:

<u>نظرية.</u> إذا كان $ABCD$ شكلاً رباعياً مرسوماً في دائرة فإن:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

وقد برهن عليها من خلال تشابه المثلثات (شكل٢٤).



شكل٢٤

كحالة خاصة لهذه النظرية ، وعندما يكون أحد أضلاع الشكل الرباعي منطبقاً على القطر، استطاع بطليموس استنتاج بعض العلاقات المثلثية المعروفة منها:

$$sin(\alpha \pm \beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta \pm cos\,\alpha\,sin\,\beta$$

$$cos(\alpha \pm \beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta \mp c\,sin\,\alpha\,sin\,\beta$$

وهاتان العلاقتان وغيرهما ، ساعدته في بناء جداوله المثلثية والفلكية . لذلك تعرف هذه العلاقات أحياناً بعلاقات بطليموس.

③ **الجغرافيا** (Geography) بالإضافة إلى كتاب الماجست هناك كتاب آخر يليه في الأهمية هو كتاب "الجغرافيا". في هذا الكتاب يقدم بطليموس نظاماً لخطوط الطول والعرض يتضمن ما يعرف بالإسقاط الكروي (أو البطليموسي) ، الذي نعرفه اليوم من خلال الخرائط. وقد استطاع من خلاله رصد ٨٠٠٠ موقع من المدن والأنهار، وغيرها من المواقع، على الأرض. ولكن بطليموس وبدلاً من الإعتماد على مقاييس إراتوستينسس اعتمد على معايير أقل دقة بكثير، في حساب خطوط الطول ، الأمر الذي أوحى للبحارة، ومنهم كريستوف كولومبوس، بصغر محيط الأرض أقل مما هو عليه. ولو عرف كولومبوس بهذا الخطأ لتردد كثيراً قبل الشروع بمغامرته الشهيرة في البحث عن القارة الجديدة.

ديوفانتوس ❸ Diophantus


ديوفانتوس

في القرن الثالث بعد الميلاد استطاعت الكنيسة فرض سيطرتها في روما وما حولها، وقد أصبح رفض التعاليم الجديدة جرماً يعاقب عليه . في هذه الوقت كان بلوتونيوس ينشر التعاليم الأفلاطونية بطريقته الخاصة في روما وكان ديوفانتوس يعمل في الحساب في الإسكندرية. من غير المعروف الكثير عن حياة ديوفانتوس، أو الفترة التي عاش فيها، سوى أنها تقع بين القرنين الثاني والرابع ميلادية، ولكننا نعرف،بمحض الصدفة، أنه عاش ٨٤ عاماً ، وذلك وذلك من خلال أحجية كتبها أحد المعجبين به لوصف حياته . من المحتمل أن يكون

ديوفانتوس قد اعتنق الدين المسيحي لأن كتـــابه الحساب (Arithmetica) تضمن إهداء لديونيسيوس أسقف الإسكندرية خلال الفترة (٢٤٧ ـ٢٦٤ م).

وقد تضمن هذا الكتاب مواضيع عدة وحلولاً لمعادلات كثيرة . من الأمثلة على هذه المواضيع التي عالجها نعرض الموضوعين الآتيين:

① **توزيع الأعداد:** في موضوع أول ناقش ديوفانتوس المسألة الآتية:

مسألة: كيف توزع عدداً مجموعاً لمربعين إلى مجموع آخر لمربعين؟

وناقش الحالات الخاصة لهذه المسألة ، مثل الحالة $a = 2, b = 3$ التي يمكن تعميمها بسهولة إلى أعداد أخرى. لاحظ أنه إذا كان $a = 1, b = 0$ فإن الناتج يكون متعلقاً بتحليل ثلاثيات فيثاغورث.

② **الأعداد المتناسبة:** في موضوع آخر وعند معالجته لبعض المسائل الهندسية في كتاب العناصر لاحظ ، في المثلث القائم الزاوية ، صحة العلاقة التالية:

مربع نصف الوتر $\mp$ مساحة المثلث = عدداً مربعاً

وهذه العلاقة مرتبطة بمفهوم ما يعرف بالعدد المتناسب (Congruent Number) . يقال عن العدد k إنه متناسب إذا وجد مثلث قائم تكون مساحته kx^2 حيث x عدد طبيعي ما. فمثلاً المثلث الذي أطوال أضلاعه ٩ و ٤٠ و٤١ قائم الزاوية لأن

$$9^2 + 40^2 = 41^2$$

وكذلك

$$\left(\frac{41}{2}\right)^2 \mp 180 = square$$ عدد مربع

وبما أن $180 = 5 \times 6^2$ إذاً ٥ هو عدد متناسب.

هنا أيضاً يمكن ملاحظة علاقة الأعداد المتناسبة بثلاثيات فيثاغورث.

يعد ديوفانتوس واحداً من أهم الجبريين المعروفين قبل الخوارزمي. فهو أول من قام بطريقة ممنهجة باستخدام الرموز الرياضية في التعبير عن التراكيب الجبرية . من هذه الرموز :

$$\Delta^T = x^2 \ ,$$
$$\Delta^{2x} = 1/x^2$$
$$K^T = x^3$$

واستخدم هذه الرموز في حل المعادلات غير المعينة التي تعرف اليوم بالمعادلات الديوفانتية .

فلا عجب أن يدعوه البعض أبا الجبر قبل أن يعطى هذا اللقب للخوارزمي.

بابوس (٤٠٠ م) ❹ Papus

وضع بابوس ملخصاً مهماً للرياضيات الإغريقية ، وخصوصاً أعمال إقليدس وأرخميدس وأبولونيوس ، وجمعها في كتاب بإسم " مختارات –Collections" . وقد كانت هذه المختارات مرجعاً مهماً ترجم العلماء العرب من خلاله جزءاً معتبراً من الرياضيات الإغريقية إلى اللغة العربية.

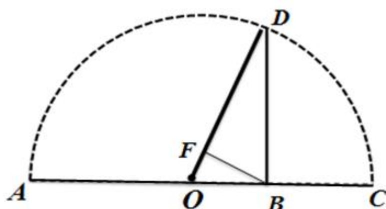
① **المتوسطات:** في أحد كتبه وضع وصفاً جيداً للمتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي والمتوسط التوافقي ، من خلال إنشاء هندسي موفق متمثل بنصف دائرة . فقد بين بابوس

أنه إذا كان في نصف الدائرة ذات المركز ٠ : $DB \perp AC$ وكان $BF \perp OD$ (شكل٢٥)

فإن:

---

❹ بابوس



شكل٢٥

DO الوسط الحسابي AB و BC.

DB الوسط الهندسي AB و BC.

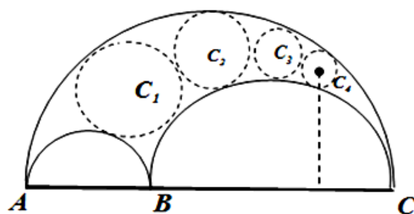
DF الوسط التوافقي AB و BC.

② **تعميم نظرية فيثاغورث:** وفي مكان آخر نجد لبابوس تعميماً لنظرية فيثاغورث يتلخص فيما يلي: إذا أنشأنا في أي مثلث متوازيي أضلاع ، مرسومين على ضلعين فيه، فبالإمكان إنشاء متوازي أضلاع ،على الضلع الثالث ، تساوي مساحته إلى مجموع مساحتي متوازيي الأضلاع السابقين.

③ **السكين:** وكمثال أخير على إنجازات بابوس في الهندسة نعرض تعميماً لمسألة أرخميدس المتعلقة بسكين الحذاء وهي:

مسألة: إذا كانت الدوائر ... $C_1, C_2, C_3,..., C_n,$ مرسومة في الأربيلوس بحيث تكون متماسة مع أنصاف الدوائر ذات الأقطار AB و BC و AC ومتماسة مع بعضها على التوالي (شكل٢٦) فإن طول العمود النازل من مركز الدائرة C_n (الحد النوني) على AC القطر يساوي n مرة طول قطر الدائرة هذه.

شكل٢٦



هيباتيا (الحلقة الأخيرة) ❺ Hyphatia



هيباتيا

هيباتيا (٤١٥ م) هي ابنة تيون (Theon) الذي عاش في الإسكندرية في بداية القرن الخامس الميلادي حيث عمل في الرياضيات وكان له بعض الانجازات فيها. وقد كان مشهوداً لهيباتيا بالعلم والجمال . وقد عملت، بعد أبيها ، في الرياضيات وقدمت تعليقات كثيرة في الرياضيات وخصوصاً حول كتابات أبولونيوس و ديوفينتوس.

ورد في الرواية " عزازيل" (للكاتب يوسف زيدان) نقلاً عن وثيقة تاريخية تعود لذلك العصر وجدت ، مؤخراً ، في أحد الأديرة بريف حلب كتبها وحفظها الراهب هيبا الذي عاصر هيباتيا وذكر بعضاً مما قالته في إحدى محاضراتها، حيث قالت: والفهم أيها الأحبة ، وإن كان فعلاً عقلياً إلا أنه فعل روحي أيضاً . فالحقائق التي نصل إليها بالمنطق وبالرياضيات ، إن لم نستشعرها بأرواحنا ، فسوف تظل حقائق باردة ، أو نظل نحن قاصرين عن إدراك روعة إدراكنا لها ... وقد مرت ساعتان وأنا أتحدث إليكم وأعرف أنني أطلت جداً ، وأرهقتكم ، فتقبلوا اعتذاري، واقبلوا تقديري لحضوركم اليوم. ولسوف أعود بعد نصف ساعة إلى هذه القاعة ، للكلام عن رياضيات ديوفانتوس. فمن أراد أن يشرفني بمشاركته فأهلاً وسهلاً به ، شريطة أن يكون من المشتغلين بالرياضيات، حتى لا يكرهها ، ويكرهني معها!

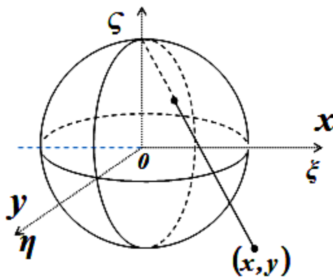
هذا ويعود ذكر هيباتيا في تاريخ الرياضيات ليس لشهرتها الرياضية وإنما لكونها أولى ضحايا الكنيسة وآخر الرياضيين في العالم اليوناني. وقد أتى هيبا على ذكر نهاية هيباتيا المأساوية من قبل الكنيسة والذي أيده فيها سقراط السكولاستيكي في كتابه تاريخ الكنيسة (٣٨٠-٤٥٠ ب م) الذي جاء فيه أن هيباتا قتلت من قبل حشد مسيحي مقاد من قبل البطريرك سيريل. ويقال إن ذلك حدث عند وقوع خلاف بين أورنتس المثالي (الذي كان حاكماً للإسكندرية و تلميذاً عند هيباتيا من قبل) وبين البطريرك سيريل، الذي اتهم هيباتيا بممارسة الشعوذة والسحر في الرياضيات وأنها سبب الشقاق بين المختلفين، فحرض عليها جمهوراً لقتلها بعد أن جروها إلى الكنيسة ،عارية ، وبعد معاملة قاسية وهمجية. بموت هيباتيا تنتهي الحضارة اليونانية والمرحلة الهيلينية. وتنتهي معها الرياضيات اليونانية ويبدأ عصر الظلمات الذي امتد لألف عام.

تساؤلات ❻

① يتم الإسقاط البطليموسي للكرة

$$\xi^2+\eta^2+\varsigma^2=1$$

على المستوي الأفقي من خلال مقابلة نقاط تقاطع نصف المستقيم الذي يبدأ من القطب $(0,0,1)$ مع سطح الكرة (النقاط الكروية) ومع المستوي الأفقي (نقاط الإسقاط).



والمطلوب:

أ) إذا كانت إحداثيات النقطة الكروية هي (ξ,η,ς) فما هو المسقط (x,y) على المستوي الأفقي؟

ب) ماهو المسقط البطليموسي للنقطة $(0,0,-1)$ ؟

ت) ما هو مسقط دائرة خط الاستواء؟

ث) ماذا يحدث لدوائر خطوط الطول الواقعة على الكرة عند إسقاطها على المستوي؟

ج) ماذا يحدث لدوائر خطوط العرض الواقعة على الكرة عند إسقاطها على المستوي ؟

ح) استنتج المسقط البطليموسي لدائرة خط الاستواء.

② إحدى العلاقات المثلثية التي توصل إليها بطليموس هي القاعدة الآتية:

$$sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\,x}{2}}$$

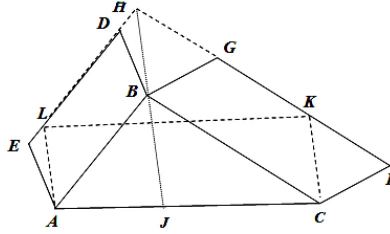
كيف نوجد قيمة $sin(15)$ اعتماداً على هذه القاعدة؟

③ حل مسألة ديوفينتوس الآتية: عددان مجموعهما ١٠ ومجموع مكعبيهما ٣٧٠ . فما هما العددان؟

④ كيف نبين أن العددين ١٤ و ٣٠ متناسبان .

⑤ برهن هندسياً أو مثلثياً على صحة صيغة هيرون من أجل حساب مساحة المثلث.

⑥ برهن هندسياً على صحة تعميم نظرية فيثاغورث لبابوس المتعلقة بمتوازيات الأضلاع اعتماداً على الشكل ٢٧ أدناه:



شكل ٢٧

⑧ ربما تعود أقدم قصة عن مسائل القيمة القصوى (الصغرى أو العظمى) إلى هيرون . ملخص هذه المسألة هو:

غراب يقف على شجرة وسط حقل قمح ويريد التقاط حبة قمح ثم الطيران نحو الجدار المجاور للحقل والمقابل للشجرة. ما هي النقطة التي يلتقط فيها الحبة لتكون المسافة المقطوعة أقل ما يمكن؟ بين ، بمحاكمة مشابهة لمبدأ انعكاس الضوء ، أن النقطة المرشحة هي النقطة الناتجة من تقاطع المستقيم الواصل بين رأس الشجرة وخيال الجدار مع المستقيم المناظر له بالنسبة لمستوي الحقل . استخدم التحليل لحل هذه المسألة بطريقة أخرى.

⑨هل تعتقد أن مسيرة الرياضيات كانت ستتغير بشكل جذري لو أن روما لم تسقط في عام ٤٧٦ م.

⑩ لو صدف وكنت رياضياً يعيش في العام ٥٠٠ ! فأي مدينة كنت تفضل أن تكون مدينتك: الإسكندرية أم روما أم أثينا أم القسطنطينية؟ علل إجابتك!

العصر العربي

المنابع ❶

في منتصف القرن السابع بدأت تظهر معالم الحضارة العربية من خلال انتشار الدين الإسلامي والفتوحات الإسلامية. ففي عام ٧٦٦ جعل الخليفة المنصور عاصمته بغداد وجعلها مركزاً تجارياً وأدبياً . وتابع من بعده هارون الرشيد (الذي حكم خلال الفترة ٧٨٦-٨٠٩ م) بأن أسس مكتبة جمع فيها الكتب والمؤلفات من جميع الأرجاء وخصوصاً من الإسكندرية وأثينا.

ومع هذا الازدهار انطلقت جموع الرياضيين من العراق والشام وإيران وتركيا وشمال إفريقيا للمشاركة في النشاط العلمي الجديد من خلال ترجمة التراث العلمي لمن سبقهم والحفاظ على هذا التراث، ثم توصلوا إلى طرقهم الخاصة في البحث والابتكار في شتى العلوم وخصوصاً في الرياضيات . وأهم المعلومات عن هذا التراث ومصادره هي:

أ) **الرياضيات الفرعونية:**

- كتابة الأعداد حسب السلم العشري.
- التعبير عن الكسور والعمليات عليها.
- أصول الهندسة ومدى ارتباطها بحساب السطوح والحجوم والبناء وبالخدمات على نهر النيل .

ب) الرياضيات البابلية:

- انجازات في الحساب الفلكي (أوردها البيروني)
- بعض الانجازات في الحساب والجبر ومساحات الأشكال وحل المعادلات .

خ) الرياضيات الفارسية

- الطرائق الفارسية في الفلك (الذي ارتبط بالتنجيم) مع وجود أرصاد فلكية.
- وجود أكثر من نظام حسابي (استخدمه المنجمون والفلكيون) ولكن ذلك

اختفى بعد ظهور النظام الهندي.

ت) الرياضيات اليونانية

مثلت الرياضيات اليونانية بداية انطلاق الرياضيات العربية من بغداد حيث بدأت ترجمة الكتب اليونانية أبرزها:

- أعمال أرخميدس: الكرة والأسطوانة والدائرة.
- أعمال أبولونيوس: جميع الأعمال.
- أعمال ديوفينتوس :كتاب الحساب.
- أعمال بطليموس: كتاب الماجست (في الفلك).
- أعمال بابوس : جميع أعماله في الميكانيكا.

من الجدير بالذكر أن المترجمين لهذه الأعمال كانوا علماء ورياضيين ولذلك كانت الترجمة عاملاً مساعداً لتطور العلم والبحث العلمي. ومع نهاية القرن التاسع كانت معظم الأعمال الإغريقية قد تم الانتهاء من ترجمتها بالإضافة إلى ما تم تعلمه من البابليين والهندوس.

ونقول أخيراً إنه إذا كانت سرعة انتشار الإسلام وتوسعه مدهشة، فإن المدهش أكثر هو جاهزية العرب وتوقهم للمعرفة ولاستيعابهم السريع لعلوم وحضارات البلدان التي فتحوها ثم تطويرها في حالات كثيرة.

وقد ساعد في ذلك أن الإمبراطورية العربية تضمنت وجود الاثنيات المختلفة مثل السورية والمصرية واليونانية والتركية والفارسية وغيرها، بالإضافة إلى عنصر التسامح مع بقية الأديان مثل المسيحية واليهودية .

الحساب ❷

عرف الرياضيون العرب والمسلمون أنواعاً متعددة من الحساب منها:

أ) **حساب الستين** اقتصر استخدام هذا النوع من الحساب على المنجمين والفلكيين ولذلك يسمى أحياناً بطريقة المنجمين أو حساب الزيج أو حساب الدرج والدقائق. ويبدو أن لهذا النظام جذوراً في الرياضيات البابلية.

ب) **حساب الجمل** وهو حساب مطور لحساب الستين عبر اقترابه من النظام العشري، حيث تم تحديد الأعداد وفق الحروف أبجد هوز ... ألخ.

د) **حساب اليد** وهو حساب مشتق من استخدام أصابع اليد . وقد استخدم هذا النظام من قبل التجار والرياضيين أمثال أبو الوفا (٩٤٠ ـ ٩٩٨ م) الذي ألف كتاباً في حساب اليد.

وقد عرف العرب أنواعاً أخرى ، من أنظمة العد، أهمها نظام الأرقام العربية الهندية ، الذي يستخدم الكسور والمنازل العشرية في العمليات الأربع . وقد ساهم هذا النظام، أيضاً، في تقدم الطرق العددية وبالتالي نظرية الأعداد . من أبرز الكتب العربية التي ظهرت في هذا المجال هي:

Brahmi		—	=	≡	+	ɤ	ɕ	7	5	7
Hindu	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
Arabic	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Medieval	0	I	2	3	߂	ϛ	6	ʌ	8	9
Modern	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

الأرقام الهندية ـ العربية

- الكاشي: مفتاح الحساب الذي يتضمن خلاصة للعمليات الحسابية المعروفة حينها.
- بهاء الدين العاملي (١٥٤٧ ـ ١٦٢٢) : خلاصة الحساب .
- سبط الماريديني (١٤٣٢ـ ١٤٩٥) : تحفة الأحباب في الحساب.
- الكرخي (٩٥٣ – ١٠٢٩): الكافي في الحساب.
- علي القلصاوي (١٤١٢ – ١٤٨٦) : كشف الحجاب عن علم الحساب.
- علي بن أحمد النسوي (١٠١٠ ـ ١٠٧٥) : أربع مقالات عالج فيها الأعداد الصحيحة والكسور العادية (العقلية) والكسور غير العادية والحساب الستيني.

وقد وضع الخوارزمي (عام ٨٢٥) كتاباً في الحساب قدم فيه القيمة المنزلية للرقم ، مرتبة في خانات من اليمين إلى اليسار. وبعد ظهور الصفر عند العرب عام ٨٧٣ م واعتماد رمز الدائرة للتعبير عنه ، أصبح النظام العشري شبه مكتمل وهو النظام الذي يستخدم في هذه الأيام

قبل ذلك كان يعبر عن الرقم ٣٠٥ ، مثلاً ، بواسطة لوحة يترك فيها مكان الصفر خالياً: |5| |3| حيث أصبح يكتب بعدئذ بالشكل: |5|0|3| . وقد استخدم الصفر بهذا الشكل من قبل الهنود في العام ٨٧٩.

وقد استخدم الحساب في حل بعض الأحجيات بطريقة العمل بالعكس! وتقوم هذه الطريقة على أن يبدأ الحل من نهاية المسألة. من الأمثلة على ذلك : ضرب عدد في نفسه وأضيف إلى الناتج ٢ وضوعف العدد وزيد على الناتج ٣ ثم قسم الناتج على ٥ وضرب الناتج في ١٠ فكان الناتج الأخير ٥٠ . فما هو العدد؟

وقد ألف الخوارزمي كتاباً آخر يعتقد أنه قصد به أن يكون كتاباً تعليمياً صغير الحجم في علم الحساب، شرح فيه نظام استخدام الأعداد والأرقام الهندية، كما شرح طرق الجمع والطرح والقسمة والضرب وحساب الكسور، ونقل هذا الكتيب إلى إسبانيا، وترجم إلى اللاتينية في القرن الثاني عشر. وقد حمل الكتاب المترجم إلى الأراضي الألمانية وترجع أول نسخة منه إلى عام ١١٤٣ ميلادية وهي مكتوبة بخط اليد وموجودة في مكتبة البلاط في فيينا.

وبعد أن انتشرت تلك الأرقام العربية في إيطاليا، كان عليها أن تعبر جبال الألب إلى أوروبا، وكانت رحلتها شاقة محفوفة بالعقبات، فقد نظر إليها الكثيرون ، وخصوصاً رجال المال والأعمال نظرة الشك والريبة، ورأوا أن الطريقة الجديدة تسهل عليهم أعمالهم ، إلا أنها تفتح باب الخداع على مصراعيه، فكيف نأمنها في إبرام العقود والمواثيق؟ ووقع الناس في حيرة من أمرهم، فهم لا يستطيعون نسيان ما اعتادوا عليه قروناً طوالاً من أرقام رومانية، وهم في الوقت نفسه يتوقون إلى تعلم تلك الأرقام العربية البسيطة. ولكن الأرقام الجديدة بدأت ، برغم هذا ، تثبت وجودها، ثم دخلت رويداً رويداً إلى سجلات الموظفين والتجار فحلت محل الأرقام الرومانية الطويلة التي كانت تشغل صفحات وصفحات. واحتاج الأمر برغم كل هذا إلى عدة قرون قبل أن تخر الأرقام الرومانية صريعة إلى غير رجعة .

الجبر ❸

يعد الجبر أحد فروع الرياضيات الذي يتعامل مع الكميات باستخدام رموز وحروف . وقد عرفه العرب بتعابير مختلفة مثل أن الجبر يدور حول ثلاثة أشياء: أموال وأعداد وجذور أو أنه صناعة يستخرج بها المجهول من المعلوم . ويعد الخوارزمي مبتكر الجبر ، ففي كتابه " حساب الجبر والمقابلة" عنى بالجبر: نقل كمية من أحد طرفي المعادلة إلى طرفها الآخر مع مراعاة الإشارات. وعنى بالمقابلة: تبسيط الكميات الناتجة بحذف الكميات المتساوية من طرفي المعادلة.

ومن الذين عملوا بالجبر هو سنان بن الفتح الحراني الذي ألف كتاباً بعنوان " الكعب والمال والأعداد المتناسبة" جاء فيه المصلحات الآتية: العدد ، الجذر، المال، الكعب ، مال المال ، المداد ، مال الكعب. وبلغة الرموز الحالية تكون هذه المصلحات على الترتيب:

$$x^0 = 1,\ x\ ,\ x^2, x^3, x^4,\ x^5,\ x^6$$

وقد استخدمت الرموز للتعبير عن الكميات الرياضية مثل (ش) من أجل الجذر أو المجهول و (م) من أجل المال و (ك) من أجل المكعب (الكعب) و (م م) من أجل مال المال ، ومن أجل القوى أكبر من ٤ فقد استخدم تركيبات من الرموز السابقة. وفي وقت متأخر ورد استخدام هذه الرموز في التعبير عن المعادلات ، فمثلاً علي القلصاوي (١٤١٢– ١٤٨٦) في كتابه كشف الحجاب عن علم الحساب أورد معادلات من النوع:

م س
٥ ٣ ل ٣٥

وهي تعني بلغة الرموز الحالية

$$5x^2 + 3x = 35$$

وقد وضع الكرخي طرقاً لجمع وطرح الأعداد الصماء منها القانون:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}}\ .$$

كما وضع قاعدة لحساب الأمثال ، في منشور ثنائي الحدين، من خلال مثلث شبيه بمثلث باسكال المعروف. وكان قد توصل ، قبل ذلك، السيجري للبرهان هندسياً على صحة المنشور:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

ومن بعده توصل عمر الخيام ونصير الدين الطوسي إلى منشور ثنائي الحدين من أجل $k = 2,3,...,n$.

تمت أيضا معالجة المعادلات من درجات مختلفة وخصوصاً التربيعية والتكعيبية وتم وضع طرق مختلفة لحلها من قبل الخوارزمي وغيره (كما سنرى فيما بعد).

نظرية الأعداد ❹

تعامل الرياضيون العرب مع خواص الأعداد ومع تصنيفاتها كأعداد زوجية وفردية ومثالية وزائدة وناقصة ومع قواسم الأعداد وتحليل التراكيب. وقد أخذت الأعداد المثالية والمتحابة حيزاً هاماً في أعمالهم متابعة لأعمال اليونانيين وخصوصاً الفيثاغورثيين.

①**الأعداد الزائدة والناقصة:** تعامل أبو الوفا البوزجاني (٩٤٠-٩٩٨) مع هذه الأعداد وعرفها كما يلي:

أ-   العدد المثالي هو العدد الذي جمعت أجزاؤه، كانت مساوية له مثل العدد ٦ .

ب- العدد الزائد هو العدد الذي إذا جمعت أجزاؤه، كانت أكبر منه مثل العدد ١٢ .

ج- العدد الناقص هو العدد الذي جمعت أجزاؤه، كانت أصغر منه مثل العدد ٨ .

وأكثر من عمل بهذه الأعداد هو ثابت ابن قرة الذي وضع عدة نظريات بهذا الخصوص وبرهن عليها.

② **فرضية فيرما:** كان لفرضية فيرما ، المعروفة، نصيباً في أعمال العرب . فقد أورد حامد بن الخضر الخوجندي هذه الفرضية من أجل $n = 3$ وأعطى برهاناً عليها ولكن تبين أنه خاطئ. كما عالج كمال الدين الفارسي (١٢٦٠-١٣٢٠) فرضية فيرما ولاحظ عدم وجود أعداد صحيحة تحقق المعادلة

$$x^4 + y^4 = z^4$$

ولكنه لم يحاول إثبات ذلك.

③**الأعداد التربيعية:** أعطى ابو عبدالله ابن ابراهيم الأموي (١٤٠٠ – ١٤٨٩) شروطاً لكي يكون العدد n مربعاً كاملاً منها:

أ- ينتهي العدد n بأحد الأرقام $00,1,4,5,6,9$.

ب- إذا انتهى n بالرقم ٦ فإن المنزلة العاشرة رقم فردي .

ت- إذا انتهى n بالرقم ٥ فإن المنزلة العاشرة ٢ .

ث- إذا قسمت n على ٧ كان الباقي ٠ أو ١ أو ٢ أو ٤ .

ج- إذا قسمت n على ٨ كان الباقي ٠ أو ١ أو ٤ .

ح- إذا قسمت n على ٩ كان الباقي ٠ أو ١ أو ٤ أو٧ .

كما أعطى قواعد ليكون العدد تكعيبياً منها:

أ- إذا قسمت n على ٧ كان الباقي ٠ أو ١ أو ٦ .

ب- إذا قسمت n على ٨ كان الباقي ٠ أو ١ أو ٣ أو ٥ أو ٧ .

ت- إذا قسمت n على ٩ كان الباقي ٠ أو ١ أو ٨ .

وأعطى أمثلة كثيرة على ذلك.

الهندسة والمثلثات ❺

تتلخص إنجازات العرب في الهندسة في الاطلاع على إنجازات من سبقوهم في هذا العلم مع نشر مختصرات عنها وتصحيحات وتعليقات عليها، بالإضافة إلى إبداعات جديدة في عدة مواضيع هندسية. وقد تجلى ذلك في نقد كل من ابن الهيثم وعمر الخيام ونصير الدين الطوسي والعباس بن سعيد الجواهري وغيرهم لكتاب إقليدس "العناصر " وتصحيح بعض الثغرات، وترميم نواقص معينة في بعض البراهين أو التعاريف . هذا بالإضافة إلى معالجة مواضيع جديدة والتوصل إلى نتائج هامة وجديدة مثل تعميم نظرية فيثاغورث، على أي مثلث وحساب مساحات الأشكال وحجومها إذا كانت فراغية، وإنجازات في المثلثات الكروية . وفيما يلي بعض الأمثلة:

أ- استخدم البيروني قانون هيرون (Heron) لحساب مساحة المثلث وأعطى برهاناً جديداً له . ثم عمم الكرخي فيما بعد هذا القانون ليصلح لأي شكل رباعي دائري أطوال أضلاعه a,b,c,d و p نصف محيطه. فيصبح قانون المساحة على الشكل:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

ب- بين الخازن (٩٠٠-٩٧١) أن مساحة المثلث المتساوي الأضلاع أكبر من مساحة أي مثلث متساوي الساقين له نفس المحيط . وقد حاول تعميم ذلك إلى المضلعات ولكنه أخفق في البرهان.

ت- ألف أبو سعيد السيجري (٩٤٥-١٠٢٠) كتاباً في الهندسة وردت فيه مسائل

مثل: إذا أعطيت مثلثاً وثلاثة أعداد أوجد نقطة داخل المثلث بحيث أن الخطوط ، من النقطة إلى رؤوس المثلث ، تقسمه إلى ثلاثة مثلثات مساحاتها تتناسب مع الأعداد الثلاثة.

ث- ألف أبو الوفاء البوزجاني كتاباً بعنوان "كتاب في عمل المسطرة والفرجار.

والكونيا) تطرق فيه إلى مسألة تثليث الزاوية وإلى مسائل أخرى في الإنشاءات الهندسية. فقد رسم ، مثلاً، مثلثاً متساوي الأضلاع داخل مربع معطى أو داخل مخمس منتظم معطى ، كما رسم أيضاً مربعاً داخل مخمس منتظم معطى (الكونيا لها شكل مثلث قائم الزاوية).

ج- حاول العرب ، ومنهم حاجي بن خليفة ، تسطيح الكرة مع نقل الخطوط المرسومة على الكرة إلى السطح المستوي المناسب. وهذا ما نعرفه اليوم باسم الإسقاط الكروي (أو الستيريوغرافي) الذي يتم من خلاله تحويل سطح الكرة إلى المستوي. أما علم المثلثات العربية فقد بني في الأصل على تعريف تابع الجيب ومنه تم الانطلاق إلى بقية الخواص . وكان الهنود قد عرفوا مفهوم الجيب على أنه نصف وتر ضعف القوس مقسوماً على نصف قطر الدائرة . وقد طور أبو الوفا البوزجاني مفهوم الجيب بحيث يكون نصف قطر الدائرة ١ وعندئذ أمكن تقسيم الزاوية القائمة إلى ٩٠ قسماً (كما فعل البيروني والبتاني) بحيث أصبح $\sin 90^o = 1$. وعندئذ توصل البيروني إلى قانون الجيوب في المثلث وهو:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

كما توصل ابن يونس الصفدي في العام ١٠٠٠ إلى القانون التالي:

$$2\cos A \sin B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

كما توصل البتاني إلى العلاقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ومن خلالها عرف العلاقة بين ظل الزاوية وجيب الزاوية وكذلك العلاقة بين ظل التمام وجيب التمام.

لقد ارتبط حساب المثلثات ، في بداياته الأولى ، عند العرب بعلم الفلك وكان لتطور علم المثلثات أثراً كبيراً في تطور علم الفلك في ذلك العصر.

علم الفلك ❻

على إثر انتشار الإسلام لمناطق بعيدة وحاجة الناس لتحديد اتجاه القبلة ومعرفة أوقات الصلاة ظهرت الحاجة للبحث عن مصدر للمعلومات في هذه المواضيع. وقد شجع الخلفاء، ومنهم أبو جعفر المنصور، العلماء على ترجمة الأعمال في الفلك وحركات النجوم. وقد بنى المأمون مرصداً على جبل قاسيون في دمشق ، وشجع العلماء، في بيت الحكمة ، على البحث في الفلك وعمل نصير الدين الطوسي في مرصد المراغة الفلكي، في زمن المعتصم، وبنى الكاشي مرصد سمرقند . ومن أبرز إنجازات الرياضيين العرب في الفلك نعرض ما يلي:

أ- وضع العلماء العرب الأزياج الفلكية في جداول مرتبة لمعرفة مواضع الكواكب في أفلاكها ولمعرفة الشهور والأيام في التقاويم المختلفة . من هذه الأزياج : زيج السند للخوارزمي والزيج الصابي للبتاني وزيج الزاهي لنصير الدين الطوسي ... الخ.

ب- قام البتاني بدراسة أعمال بطليموس وصحح بعض الأفكار الواردة فيه ووضع جداول فلكية على درجة عالية من الدقة.

ت- حدد شمس الدين الخليلي (١٣٢٠ - ١٣٨٠) اتجاه القبلة بخطأ لا يزيد عن درجة واحدة .

ث- ساهم تطور علم المثلثات من قبل بعض العلماء مثل البوزجاني والبيروني ونصير الدين الطوسي في ظهور علم المثلثات الكروية ، الأمر الذي ساهم بدوره في إمكانية تحديد الزمن والجغرافيا وتحديد خطوط الطول والعرض للمدن. حتى أن البيروني درس عملية اسقاط نصف كرة في المستوي

ج- تم استخدام علم المثلثات، أيضاً في حسابات أخرى، مثل ارتفاع الشمس(البتاني) ومحيط الأرض (البيروني في كتابه الإصطرلاب) وطول السنة الشمسية (عمر الخيام)

وقياس الزاوية بين المستوي الذي يبدو أن الشمس تدور فيه وبين خط الاستواء (الخازن).

تساؤلات

① ضرب عدد في نفسه وأضيف إلى الناتج ٤ وضوعف العدد وزيد على الناتج ٦ ثم قسم الناتج على ٤ وضرب الناتج في ٣ فكان الناتج الأخير ٤٨ . فما هو العدد؟

② كيف نكتب الصيغة الآتية، التي استخدمها العرب، بالرموز الحالية:

م   س
٥ ل ٣   ٢٢

③ شكل رباعي إحدى زواياه قائمة وأطوال أضلاعه ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨ . احسب مساحته بالاستفادة من قاعدة هيرون أو باستخدام تعميم البيروني.

④ عالج السموءل المغربي ما عرف بالكسور الناطقة. فقد قام ، مثلاً ، بجعل المقام ناطقاً في الكسر الآتي كما يلي:

$$\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{5}+2\sqrt{6}+6\sqrt{15}+20\sqrt{2}}{13}$$

تحقق من ذلك .

④ برهن على صحة العلاقة (التي يعود برهانها لابن البناء المراكشي):

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

⑤ اهتم بهاء الدين العاملي بالمتتاليات وبرهن على صحة المتطابقتين الآتيتين:

$$1)\ 2+4+6+8+\ldots+2n=n(n+1)$$

$$2)\ 1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$$

كيف نبرهن على صحة هاتين المتطابقتين!

⑥ برهن على صحة قانون أبن يونس:

$$2\cos A\sin B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

ثم استخدمه لتحويل جداء العددين $0.4567,\ 0.5678$ إلى مجموع .

⑦ ماهي الفوائد وماهي المآخذ على أنظمة العد الثنائي والعشري والستيني وما هو ارتباط ذلك باختيار الإنسان البدائي لنظام معين؟

⑧ قارن بين قبول العرب للعلوم المجاورة والتعامل معها بعد الفتوحات الإسلامية مع حالة قبول العلوم بعد فتوحات الاسكندر ومع السيطرة الرومانية فيما بعد.

⑧ هل من حسن حظ الأوروبيين أم من سوء حظهم بالنسبة للرياضيات إيقاف زحف العرب في طولوس (بواتييه) في عام ٧٣٢ م ؟

العصر الذهبي

بيت الحكمة ❶

مع بروز مدينة بغداد كعاصمة للخلافة ومركزاً للعلوم والأدب وبعد أن أسس هارون الرشيد مكتبة كبيرة من الكتب والمؤلفات ، جاء بعده المأمون الذي حكم خلال الفترة ٨١٣ – ٨٣٣ م . من الأقاويل المتداولة أن أرسطو ظهر للخليفة المأمون في الحلم يوصيه بالحفاظ على علوم الأقدمين . بغض النظر عن صحة هذا القول فقد أسس المأمون مدرسة، أسماها بيت الحكمة، دامت ٢٠٠ سنة توافد إليها الرياضيون من جميع الأنحاء (كالهند واليونان) للتعلم والترجمة والعمل لنقل المعلومات. وقد كان الدعم والتشجيع للعلم يأتي من قبل الدين والدولة ، حيث كان القرن التاسع بحق هو عصر الازدهار العربي متمثلاً ، في نصفه الأول، بالخوارزمي وفي نصفه الثاني بثابت ابن قرة. وإن كان الخوارزمي شبيه إقليدس في كتابة العناصر فإن ابن قرة شبيه بابوس في التعليق عليها.

فقد قام الجبريون العرب في هذه الحقبة بتطوير كبير للجبر الذي وصل إليهم من العهد اليوناني. وقد قاموا بإضافات جديدة وجدية من خلال استخدام ملاحظات الإغريق في البراهين وإضافة طرق جديدة خاصة بهم لتثبيت أقدام الجبر. ثم انتقلت بعض هذه الأعمال إلى أوروبا فأعطت الأوروبيين أول لمحة عن الجبر ولكن بعض هذه الأعمال لم تصلهم مما اضطرهم للبحث عن هذه الأفكار بمفردهم.

الخوارزمي (٧٨٠-٨٥٠م) ❷

قدم الخوارزمي من شمال بحر الأورال– وسط آسيا - وكان أول من دخل بيت الحكمة. اهتم الخوارزمي بدراسة الرياضيات والجغرافية والفلك إلا أن شهرته الحقيقية تعود إلى أنه أول من ابتكر علم الجبر ليبقى في مقدمة العلوم الرياضية طوال ثلاثة قرون متتالية.



الخوارزمي

من اشهر الكتب التي ألفها في هذا المجال هو كتاب " لقد تكلم الخوارزمي ". والكلمة الغوريتم (Algorithm) التي كانت تعني العمليات الحسابية بالنظام الهندي) تأتي من هذا العنوان . ومن كتبه الشهيرة أيضاً هو كتاب " كتاب الجبر والمقابلة". ومن هنا تأتي تسمية الجبر (Algebra) المعروفة والمستخدمة حالياً في الغرب والشرق.

كتاب الجبر والمقابلة ، الذي ألَّفه ، يحتوي على ما يحتاجه الناس في تحديد مواريثهم ووصاياهم، وفي مقاسمتهم وأحكامهم وتجارتهم، وغير ذلك من المعاملات التي تجري بين الناس كالبيع والشراء، وصرافة الدراهم، والتأجير، كما يبحث في أعمال مسح الأرض فيعين وحدة القياس، ويقوم بأعمال تطبيقية تتناول مساحة بعض السطوح، ومساحة الدائرة، ومساحة قطاعات في الدائرة، وقد عين لذلك قيمة النسبة التقريبية π فكانت ٣ ١/٧ أو ٢٢/٧، وتوصل أيضاً إلى حساب أحجام بعض الأجسام، كالهرم الثلاثي، والهرم الرباعي والمخروط.

من أهم إنجازات الخوارزمي نذكر ما يلي:

١- أسس النظام العشري ويقال أنه رمز للصفر بالرمز ٠ واستطاع أن يكتب أي رقم بهذا النظام (أخذ الرموز من الهند).

٢- وجد طريقة لضرب الأعداد.

٣- كان إنتاجه الأكبر في الجبر (خصوصاً مقارنة الطرفين في المعادلات) وقد عالج ست حالات خاصة للمعادلة من الدرجة الثانية (لأنه كان يتعامل مع الأعداد الموجبة فقط).

٤- أعطى معنى هندسياً للحلول، ومن خلال ذلك استطاع إخضاع الجبر للحساب.

٥- استخدم نظرية فيثاغورث لحساب مساحة مثلث عرفت أطوال أضلاعه.

٦- أعطى حلولاً لمسائل عملية واجهت المسلمين في حياتهم اليومية مثل الميراث والتجارة .

٧- وجد أول خريطة مقبولة لآسيا وأفريقيا (بناء على طلب المأمون) . وذلك من خلال أبحاثه الخاصة ومن خلال تعديلاته على أعمال بطليموس في الجغرافية (فقد اشرف على عمل ٧٠ جغرافيا لإنجاز هذه الخريطة وقد استفاد الباحثون الأوروبيون من هذه الأبحاث كثيراً بعد ترجمتها إلى اللاتينية.

لغة الخوارزمي ❸

تعامل الخوارزمي مع المعادلات الخطية وغير الخطية وأعطى طرقاُ لحلها مثل طريقة الخطأين أو طريقة الميزان . كما اعتمد مصطلحات مناسبة تفيده في معالجة هذه المعادلات مثل:

الجذر: x ، المال: x^2 ، المكعب: x^3 ، مال المال: x^4 ، المداد: x^5 ، مال الكعب: x^6

أما كيفية استخدام هذه الرموز فيوضحها الجدول التالي:

لغة الخوارزمي	بلغة الرموز الحالية
فلنضرب شيئاً في عشرة إلا شيء	$x(10-x)$
فتكون عشرة أشياء إلا مالاً	$10x-x^2$
نضربه في أربعة لقولك أربع مرات	$4(10x-x^2)$
فيكون ذلك أربعين شيئاً إلا أربعة أموال	$40x-4x^2$

وعندما ترد العبارة التالية: "إن قدر العدد والجذر من المال كقدر الجذر والمال من الكعب " فهذا يعني ، برموز هذه الأيام ، العلاقة الآتية:

$$\frac{x+x^2}{x^3}\ \frac{1+x}{x^2} =$$

كما تعامل الخوارزمي مع المعادلات التربيعية من خلال تصنيفها إلى خمسة أنواع أهمها النوع الآتي (الذي لم يتعامل معه أحد قبل الخوارزمي) :

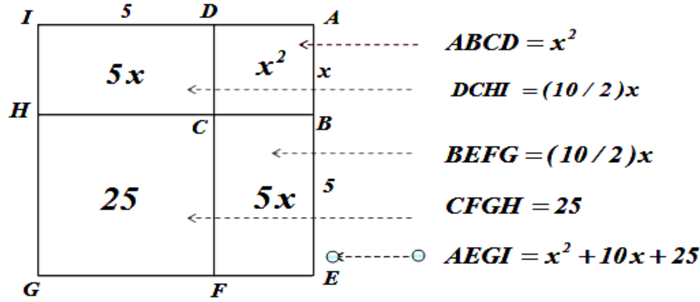
$$ax^2+bx=c$$

حيث a,b,c أعداد موجبة ، ويمكن للثابت a أن يأخذ قيمة ١ دائماً. وذكر أن لهذه المعادلة جذرين ولكنه عند حلها كان يأخذ بالأجوبة الموجبة فقط (لم يتوصل ديوفانتوس سوى لحل واحد). وقد بين أن هناك مسائل يستحيل حلها (نحن نعرف حالياً أنه يمكن أن يكون للمعادلة جذور عقدية) . كما تحدث عن الحالة التي قد يتساوى فيها جذرا المعادلة. وكحالة خاصة فقد تعامل الخوارزمي مع المعادلة :

$$x^2+10x=39$$

التي تعرف بالمعادلة الذهبية ، وأعطى ثلاث طرق لحلها اثنتان منها هندسيتان وواحدة جبرية مشابهة لطريقة استخدام مميز المعادلة. أما الطريقة الهندسية فيمكن أن تعرض

خطوات حلها كما يلي: نبدأ بإنشاء المربع $ABCD$ الذي طول ضلعه x ثم نتابع تمديد أضلاعه ، كما على المخطط ، أدناه فنلاحظ أن:



ثم نعوض في المعادلة الذهبية فيكون:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64 \;,\; AEGI = 64 = 8 \cdot 8 \;,\; AD = x = 3$$

يبقى أن نلاحظ وجود جذر آخر $x = -13$ لم يلحظه الخوارزمي كما لم يلحظه اليونانيون.

ثابت ابن قرة (٨٣٦ – ٩٠١ م) 4

ولد ثابت بن قرة في حران - جنوب تركيا - واسمه بالكامل هو: ثابت بن قرة بن مروان بن ثابت بن إبراهيم بن زكريا بن مارتياوس بن سلامون الحراني، وكنيته أبو الحسن وكان عضواً في ما يسمى بمجموعة الفيثاغورثيين الجدد ، التي عرفت بالصبيان (أو الصابئة) . بعد اكتشافه



ثابت أبن قرة

من قبل أحد أعضاء بيت الحكمة تمت دعوته إلى بغداد ، في عام ٨٧٠ م ، فأصبح عضواً بارزاً في بيت الحكمة. وفي بيت الحكمة كان من المؤسسين للمدرسة التي عملت على ترجمة أعمال إقليدس وأرخميدس وبطليموس (بينما أعمال ديوفينتوس وبابوس بقيت مجهولة بالنسبة للعرب حتى القرن العاشر). فلولا ابن قرة وجهده لفقد الكثير من كتب الإغريق وأعمال الأقدمين .

عندما عاد أبن قرة إلى وطنه حران قادته آراؤه الفلسفية والراديكالية إلى مواجهة اتهامات دينية خطيرة . وللتخلص من الملاحقة أضطر لمغادرة حران، حيث توجه إلى الرقة في عام ٨٨٤ م وأنشأ فبها مدرسة عليا لتعليم الفلك والفلسفة والطب. ومن تلاميذه سنان إبراهيم وابن أخته البتاني وأيوب بن قاسم الرقي وغيرهم من منطقة الجزيرة السورية . وبعد ذلك انتقل إلى بغداد من جديد ليعمل في المركز الفلكي هناك.

كان ثابت يجمع بين عدد كبير من العلوم، وقد نبغ فيها جميعا؛ فقد برع في الطب، كما نبغ في الرياضيات، وتفوق في الفلك، وأتقن عددا من اللغات التي ترجم ونقل منها في مهارة واقتدار، علاوة على إتقانه وتمكنه من اللغة العربية، وقد جاءت ترجماته متسمة بالسهولة والوضوح، وعباراته سلسة بسيطة. وقد امتدت آثاره العلمية وفتوحه في علم الرياضيات إلى العصور التالية له ؛ حتى استحق أن يطلق عليه لقب "إقليدس العرب" .

مآثر ابن قرة ❺

كتب ابن قرة في: السياسة و القواعد – جمهورية أفلاطون و الحصبة والأناتوميا (تشريح الطيور) والساعات الشمسية ومسلمة التوازي و المعادلات التكعيبية و حول هلالية القمر و المثلثات الفراغية ، بالإضافة إلى إنجازات كثيرة ، نعرض فيما يلي بعضاً منها:

① **الأعداد المتحابة:** في كتابه " تحديد الأعداد المتحابة" أعطى القاعدة الآتية: إذا كانت الأعداد p,q,r معطاة بالعلاقات:

$$p=3\cdot 2^n-1, \qquad q=3\cdot 2^{n-1}-1, \qquad r=9\cdot 2^{2n-1}-1$$

من أجل كل عدد موجب $n>1$ ، فإن القاعدة الآتية تكون صحيحة:

قاعدة: إذا كانت الأعداد p,q,r أولية ، كان العددان $2^n pq \ , \ 2^n r$ متحابين .

كحالة خاصة لهذه القاعدة نضع $n=2$ فيكون $p=11$ و $q=5$ ومن ثم نحصل على العددين المتحابين $284 \ , \ 220$ وهي الحالة الوحيدة التي عرفها الإغريق.

من غير المعروف إذا كانت قاعدة ثابت ابن قرة تصح من أجل عدد غير منته من الأزواج المتحابة ولكن من المعروف أن هناك أعداداً متحابة لا تخضع لهذه القاعدة مثل الزوج ١١٨٤ ، ١٢١٠(بين ذلك لأول مرة ، وعمره ١٦ عاماً ، باغانيني - Paganini عام ١٨٦٦).

② **المربعات السحرية:** اهتم العرب بالمربعات السحرية وسموها بأسماء مختلفة مثل "علم أعداد الوفق" أو "علم الحروف والتكسير". وقد ألف بطاش زادة كتاباً بعنوان" مفتاح السعادة ومصباح السيادة" عالج فيه موضوع المربعات السحرية. وقد اهتم أيضاً ثابت ابن قرة بالمربعات السحرية وطور طريقة لإنشاء المربع السحري كما يلي:

- لإنشاء مربع سحري مكون من n سطراً و n عموداً نرتب الأعداد الصحيحة من ١ إلى n^2 .
- نفرض أن مجموع الأرقام في أي عمود أو صف أو قطر يساوي c .
- يكون مجموع الأرقام في المربع السحري بكامله cn لأنه يوجد n صفاً.

- **نلاحظ** أن

$$1+2+3+...+n^2=\frac{1}{2}n^2\left(1+n^2\right)$$

- بما أن الأعداد الموجودة في المربع السحري هي الأعداد $1,2,..,n^2$ فإن:

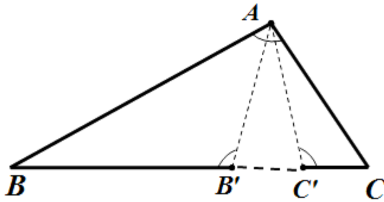
$$c=\frac{1}{2}n\left(1+n^2\right)$$

- جرب توزيع الأعداد في المربع السحري بحيث يكون مجموع كل صف وكل عمود وكل قطر يساوي c وتحقق مثلاً من أجل $n=3$ أن الأعداد $1,2,...,9$ توزع في المربع السحري المجاور.

6	7	2
1	5	9
8	3	4

③ **ابن قرة في الهندسة**: لقد عمم بابوس نظرية فيثاغورث إلى مثلثات أخرى غير قائمة في القرن الخامس بعد الميلاد . وكذلك عمم ثابت أبن قرة نظرية فيثاغورث إلى أي مثلث ، قائم أو غير قائم ، كما يلي:

في المثلث ABC إذا أنشأنا قاطعين AB',AC' من الرأس A للضلع المقابلة بحيث يكون $\widehat{A}=\widehat{B'}=\widehat{C'}$ (الشكل٢٨) فإن:



شكل٢٨

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}\left(\overline{BB'}+\overline{CC'}\right)$$

من الملاحظ أنه إذا كان المثلث قائماً فإن كلاً من الزاويتين $\widehat{B'}, \widehat{C'}$ تكون قائمة وتتحول الصيغة السابقة إلى نظرية فيثاغورث المعروفة:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

أيضاً وفي الهندسة استطاع ابن قرة إيجاد حجم المجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره العام. هذا بالإضافة إلى إنجازات هندسية كثيرة. لقد قال عنه " ول ديورانت " مؤلف موسوعة قصة الحضارة: إنه أعظم علماء الهندسة المسلمين.

أبو بكر الكرخي(٩٥٣ – ١٠١٩م) ❻

هو أبو بكر محمد الكرخي (نسبة إلى كرخ من ضواحي بغداد). لا تتوافر عن الكرخي معلومات كافية، وحتى ميلاده غير مؤكد إلا أنه يعد من كبار علماء الرياضيات المسلمين، وكان له أثر كبير في تقدم علم الرياضيات، وخصوصاً في الجبر والسلاسل العددية .

① **في الجبر:** تابع الكرخي أعمال الخوارزمي وأبو كامل في إخضاع الجبر للحساب. أحد مؤلفاته " الفخري" يبحث في تحديد المجاهيل من خلال المعاليم. وقد استطاع التعامل مع مقادير القوة $x, x^2, ..., x^n$ بحيث ظهرت إمكانية العمليات الأربع على كثيرات الحدود. واستخدم ذلك في دراسة المعادلات من درجات أعلى فقد أعطى ، مثلا، حلولاً عددية للمعادلة

$$ax^{2n} + bx^n = c$$

ولكنه اكتفى بالبحث عن الحلول الموجبة.

② **في السلاسل:** اهتم الرياضيون العرب بالمتتاليات والسلاسل وعلى رأسهم البيروني والمراكشي والكرخي . وقد تعامل الكرخي مع سلاسل مختلفة منها السلسلة:

$$1+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

المعروفة من قبل البابليين واليونانيين. وما هو جديد فيها هو أن الكرخي برهن عليها من خلال إثبات صحة العلاقة:

$$\frac{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}{1+2+3+\ldots+n}=\frac{1}{3}(2n+1) \ .$$

ومن مآثر الكرخي أنه برهن على صحة المساواة:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

(المعروفة من قبل المراكشي) وذلك اعتماداً على القانون :

$$1^3+2^3+\ldots+10^3=(1+2+\ldots+10)^2$$

الذي توصل إليه من خلال ملاحظة أن:

$$\begin{aligned}(1+2+\ldots+10)^2&=(1+2+\ldots+9)^2+10^3\\&=(1+2+\ldots+8)^2+9^3+10^3\end{aligned}$$

حيث كرر هذا الأسلوب حتى حصل على القاعدة المطلوبة. وكان هذا الأسلوب صالحاً من أجل كل n .

③ **من الكرخي إلى نيوتن**: كان الكرخي بارعاً في ابتكار الأنماط الرياضية فقد ابتكر، مثلاً ، مثلثه المشهور(انظرالشكل) الذي يعرف اليوم بمثلث باسكال .

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \\ &&&&\ldots&&&& \end{array}$$

وقد استخدم هذا المنشور في إيجاد أمثال منشور ثنائي الحدين :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ .$$

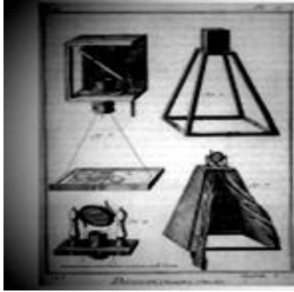
هذا المنشور يعود ، حقيقة ، إلى الكرخي ولكنه يعزى ، بغير حق، إلى نيوتن.

ابن الهيثم (٩٦٥- ١٠٣٩ م) ❼



أبن الهيثم

عاش أبن الهيثم في مصر. من مؤلفاته الشهيرة في البصريات "علم البصريات" وهذا الكتاب غني بالمعادلات المثلثية وبتطبيقاتها في علم البصريات. وقد تم التعرف عليه من قبل الأوروبيين في القرن الثالث عشر من خلال كتابه المذكور الذي يتضمن النظرية الرياضـــــية في الضوء، حيث ساعد ذلك في في حل مسألة الضوء من خلال إيجاد التوافق بين الدراسات التجريبية لسلوك الضوء والبراهين الهندسية المكتشفة . وقد أرسى أساسيات علم العدسات وشرّح العين تشريحا كاملا ، وهو تاريخيا أول من قام بتجارب الكاميرا.

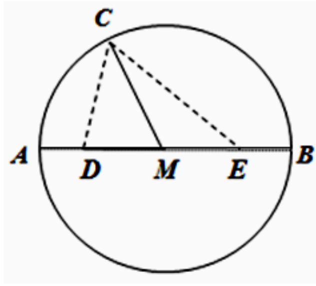


عدسات ابن الهيثم

قال بعض المؤرخين الغربيين (مثل أرنولد وسارطون): إن علم البصريات وصل إلى الأوج بظهور ابن الهيثم ، فقد كان أعظم عالم ظهر عند المسلمين في علم الطبيعة ، بل أعظم علماء الطبيعة في القرون الوسطى ومن أعظم علماء البصريات القليلين المشهورين في كل زمن ، حتى أن دائرة المعارف البريطانية وصفته بأنه رائد علم البصريات بعد بطليموس . لأبن الهيثم إنجازات في عدة مواضيع رياضية نذكر منها:

① **في الهندسة:** استخدم ابن الهيثم قوانين المثلثات في الوصول إلى نتائج هندسية كثيرة. فقد استخدم مثلاً قانون جيوب التمام لإثبات ما يلي:

مسألة: على الشكل٢٩ لتكن النقطتان D و E واقعتين على قطر من دائرة AB وعلى مسافة واحدة من المركز M. عندئذ يكون مجموع مربعي كل خطين يخرجان من النقطتين المذكورتين ويلتقيان في نقطة مثل C على المحيط



شكل٢٩

مساوياً لضعف مجموع مربعي نصف القطر والخط الواصل بين إحدى النقطتين ومركز الدائرة . أي أن

$$CD^2 + CE^2 = 2\left(CM^2 + DM^2\right)$$

في الحالة الخاصة التي تنطبق فيها النقطتان D و E على طرفي القطر في الدائرة فإننا نحصل على نظرية فيثاغورث ، المعروفة، ونلاحظ في الوقت نفسه على أن الزاوية المحيطية التي تحصر القطر في الدائرة هي قائمة.

وقد برهن ابن الهيثم على مسلمة التوازي ، ولكن الثغرة في البرهان هي أن تعريفه للخطين المتوازيين يحتوي ضمناً على المسلمة. ولكن محاولاته لم تذهب سدى، فقد تبين من خلال هذا البرهان أن مسلمة التوازي تكافئ حقيقة أن مجموع زوايا المثلث تساوي ١٨٠ درجة.

② **نظرية الأعداد:** في مجال نظرية الأعداد، تعود لابن الهيثم النظرية الآتية:

نظرية: إذا كان p عدداً أوليا فإن $1+(p-1)!$ يقبل القسمة على p .

هذه النظرية تعرف بنظرية ويلسون وقيل إن ويلسون عرف هذه الحقيقة في عام ١٧٧٠ ولكنه لم يبرهن عليها . وأول برهان لهذه الحقيقة يعود إلى لاغرانج ١٧٧١ أي بعد ٧٥٠ عاماً من أبن الهيثم.

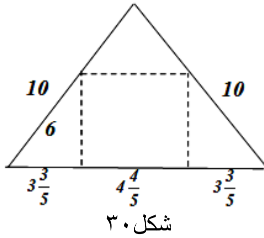
تساؤلات

① حل المعادلة الأتية هندسياً بطرقة الخوارزمي:

$$x^2+4x=21$$

② بعض المسائل التي عالجها الخوارزمي توضح علاقة الرياضيات العربية بالرياضيات البابلية والهيرونية (نسبة إلى هيرون) . منها المسألة التالية:

في المثلث المتساوي الساقين ذي الساق ١٠ ياردة والقاعدة ١٢ ياردة رسم مربع (انظر الشكل٣٠) والمطلوب هو معرفة طول ضلع هذا المربع.



شكل٣٠

لقد وجد الخوارزمي أن طول ارتفاع المثلث هو ٨ ياردة وأن مساحة المثلث ٤٨ ياردة . وبعد أن سمى ضلع المربع باسم "الشيء" لاحظ أن مربع الشيء هو مساحة المثلث الكبير مطروحاً منه مساحات المثلثات الثلاثة الصغيرة . وبمقارنة مساحة هذه المثلثات مع "الشيء" توصل إلى أن طول الشيء هو $4\frac{4}{5}$ ياردة وهو ضلع المربع.

تحقق من أن جواب الخوارزمي في حل المسألة كان صحيحاً!

③ برهن على صحة تعميم نظرية فيثاغورث لثابت ابن قرة باستخدام تشابه المثلثات؟

④ باستخدام قاعدة ثابت ابن قرة بين أن العددين ١٨٤١٠ و ١٩٢٩٦ متحابان.

⑤ برهن الكرخي على صحة العلاقة

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

اعتماداً على القانون

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left(\sum_{r=1}^{n-1} r\right)^2$$

الذي توصل إليه من خلال ملاحظة أن:

$$\left(\sum_{r=1}^{n} r\right)^2 = \left(\sum_{r=1}^{n-1} r\right)^2 + n^3$$

برهن على صحة العلاقة والقانون أعلاه.

⑥ يختلف جواب الخوارزمي في المسألة ② عن جواب هيرون بالشكل فقط حيث عبر هيرون عن طول ضلع المربع المطلوب بواسطة كسور الواحدة $4\frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{10}$. كيف نستطيع ، من هذا المثال ، ملاحظة صحة فرضية التواصل التاريخي في الرياضيات.

XIV الفصل الرابع عشر

انتشار الرياضيات العربية

❶ السموءل ١١٢٥- ١١٧٤)

هو أبو يحي المغربي السموءل . عاش في بغداد بعد أن ولد من أب وأم يهوديين فقد كان أبوه شاعراً عبرياً. من إنجازاته:

١- له كتب في الجنس وقصص الغرام مثل: مشوار العشاق في حديقة الأشواق.

٢- اعتنق الإسلام في سن ٤٠.

٣- تابع أعمال الكرخي (كثيرات الحدود وثنائي الحدين).

٤- ألف كتابا أسمه الباهر وعمره ١٩ عاماً تعامل فيه مع الصفر والأعداد السالبة، حيث سمى المقدار ٠ بالقوة الفارغة ووضع قواعد للتعامل معه فقال:

أ- إذا طرح عدد موجب من القوة الفارغة نحصل على قيمة العدد السالبة:

$$0-a=-a$$

ب- إذا طرح عدد سالب من القوة الفارغة نحصل على قيمة العدد الموجبة:

$$0-(-a)=a$$

ح- ضرب عدد سالب في عدد موجب هو عدد سالب وضرب عدد سالب في عدد سالب هو عدد موجب.

من الأمور غير الرياضية التي جعلته شهيراً هي أنه كتب في عام ١١٦٧ مخطوطة تتضمن حججه ضد اليهودية لكي يبرر للعالم إسلامه وأصبحت هذه الورقة وثيقة تاريخية شهيرة كدعم للإسلام ضد اليهودية.

عمر الخيام ١٠٥٠-١١٢٣) ❷



عمر الخيام

عاش عمر الخيام في نيسابور – إيران . عندما كان صغيراً كان له صديقان : نظام الملك وحسن بن صباح . وقد تعاهد الأصدقاء الثلاثة عند الكبر وفي حال وصول أحدهم إلى السلطة ، أو الغنى ، فإنه سيشارك الباقين في الثروة . وهكذا كان ! أصبح نظام الملك غنياً فقد غدا مقرباً من السلطان السلجوقي (التركي) جلال الدين مالك شاه. على إثر ذلك عين حسن بن صباح بمنصب جيد في القصر وحاول بعدئذ التقرب من السلطان لكي يأخذ مكان نظام الملك فنفي على إثر ذلك.

أما عمر الخيام فقد رفض المنصب المعروض عليه مفضلاً القبول براتب دوري يكفيه للعيش والتفرغ للهو والفلسفة وصناعة الرياضيات (بينما كان والده منهمكاً بصناعة الخيام). وقد كان الخيام فيلسوفاً وشاعراً مميزاً ، حيث ذاع سيطه من خلال الرباعيات (رباعيات الخيام) التي ترجمت للكثير من لغات العالم ، وترجمها إلى العربية أحمد رامي وتغنت بها أم كلثوم . أكثر من ثلاثمائة كتاب باللغة العربية دونت حول هذا الشاعر، اللغز الذي حير العالم برباعياته العرفانية وحكمه الإنسانية ولم الشمل، بلغة فلسفية خلدها التاريخ . فسر البعض فلسفته وتصوّفه على أنه إلحاد وزندقة وأحرقت كتبه، إلا أن هناك فريقاً كبيراً آخر يقر له بأنه مات على الإسلام . بالإضافة إلى الفلسفة واللغة والتاريخ فقد تخصص في الرياضيات والفلك وله إنجازات كثيرة نذكر منها:

① **في الهندسة:** نقد عمر الخيام برهان المسلمة الخامسة ، الذي قدمه الخازن، والذي اعتمد فيه على أن المحل الهندسي للنقطة المتحركة ، بمسافة واحدة عن نقاط مستقيم، هو بالضرورة مستقيم مواز للمستقيم المعطى، حيث يخالف - برأي الخيام- مبدأ أرسطو في نفي وجود اللانهاية، وبالتالي نفي وجود الحركة. وفي الهندسة المعاصرة يكون هذا الفرض مكافئاً للمسلمة الخامسة نفسها. وقد حاول عمر الخيام البرهان على هذه المسلمة. وفي هذا السبيل استخدم وبذكاء الشكل الرباعي ، الذي عرف فيما بعد برباعي ساكيري، ولكنه وخلال محاولته هذه وقع في هفوة مشابهة لتلك التي وقع فيها الخازن، حيث أضاف مبدأ: الخطان المتقاربان من بعضهما يتلاقيان ومن المستحيل تباعدهما من جهة التقارب.

② **في الفلك:** عمل بالفلك وأوجد أن طول السنة الشمسية هو ٣٦٥ يوماً و٥ ساعات و٤٩ دقيقة و٥,٧٥ ثانية (الخطأ هو يوم واحد كل ٥٠٠٠ سنة).

③**في الجبر:** قضى الخيام معظم وقته في حلول المعادلة من الدرجة الثالثة (عالج ١٣ نوعاً) وتوصل للحل هندسياً في بعض الحالات الخاصة.

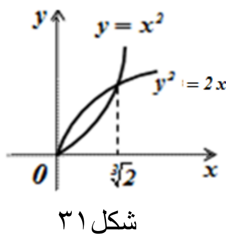
<u>**فمثلاً**</u> : رأى أن حل المعادلة $x^3 - 2 = 0$ يعني إيجاد الجذر التكعيبي للعدد ٢. ولإيجاد الجذر التكعيبي لهذا العدد استخدم طريقة هندسية وبأسلوبين :

<u>الأول</u>: ناتج عن نقطة تقاطع القطع المكافئ $y = x^2$ مع القطع الزائد $xy = 2$ حيث يكون الإحداثي الأفقي لنقطة التقاطع هو $\sqrt[3]{2}$.

والثاني: ناتج عن نقطة تقاطع القطعين المكافئين:

$$y = x^2, \quad y^2 = 2x$$

وهو متمثل بالاحداثي الأفقي لهذه النقطة المعبر عنه بالعدد $\sqrt[3]{2}$ (شكل٣١).



شكل٣١

وكمثال آخر فقد عالج الخيام في عام ١٠٧٤ المعادلة من الشكل:

$$x^3 + a^2 x = a^2 b$$

وبين أن الحل هو فاصلة تقاطع القطعين:

$$x^2 = ay \ , \ \ y^2 = x(b - x) \ .$$

بالرغم من تقدمه في هذا المجال إلا أنه لم يتوصل لإيجاد حل عام للمعادلات من الدرجة الثالثة ، كما لم يستطع بلوغ الحل عندما كانت تعترضه القيم المطلقة . وقد كان لديه إحساس بوجود مثل هذه الحلول حيث قال: ربما سيحل هذه المشكلة الآخرون في المستقبل. وبالفعل فقد تحقق هذا الأمل في القرن السادس عشر (على يد تارتاليا، فييتا ، كاردانو ... الخ).

نقول أخيراً إن ترشيح منظمة اليونسكو يوم ١٨ أيار ، من كل عام ، يوما عالميا لتخليد ذكراه يعد دليلا على جهوده لتحقيق التسامح والوفاق الإنساني والتعايش السلمي .

❸ البيروني (٩٧٣- ١٠٥٥)

سافر البيروني إلى الهند وعمل بفروع كثيرة مثل الرياضيات الفلسفة والفيزياء والفلك وكذلك في الشطرنج . وهو يعد واحداً ممن أسهموا في الوصول إلى علم المثلثات الحديث. وهو، قبل ٦٠٠ سنة من غاليليو، ناقش نظرية الأرض التي تدور حول محورها ، وقد استطـاع،

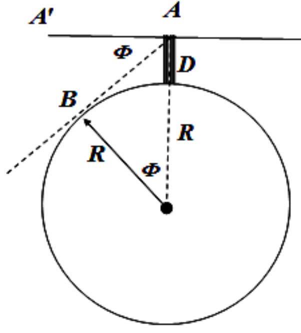


البيروني

بحسابات رياضية متواضعة، إيجاد قيمة تقريبية لنصف قطر الأرض.

① **حساب محيط الأرض:** في كتابه الاصطرلاب أعطى طريقة لحساب محيط الأرض كما يلي:

- اصعد على جبل ارتفاعه عن البحر أو عن أرض منبسطة D لترصد غروب الشمس ('AA خط الأفق من القمة شكل ٣٢).
- قس زاوية الانحطاط Φ (الزاوية بين الخط الواصل بين عين الراصد ونقطة غروب الشمس B مع الخط الأفقي المار من عين الناظر).
- ارمز بالرمز R لنصف قطر الأرض



شكل٣٢

فيكون نصف قطر الأرض:

$$R = \frac{D\cos\Phi}{1-\cos\Phi}$$

ويكون محيط الأرض:

$$M = 2\pi R = 2\,\frac{22}{7}\,\frac{D\cos\Phi}{1-\cos\Phi}$$

②**السلسلة الشطرنجية** : من منا لا يتذكر أسطورة الشطرنج التي ملخصها: أن الخليفة المأمون أراد مكافأة مخترع الشطرنج الذي كان طلبه : حبة قمح في أول مربع ويليه حبتان في المربع الثاني وهكذا في كل مربع يجب مضاعفة العدد الذي قبله ، حتى نصل إلى المربع ٦٤. فأمر الخليفة بإعطائه عدة أكياس من القمح بناء على هذا الطلب الساذج كما بدا له! ولكن تبين، بعد أن أصر المخترع على طلبه ، أن هذا الطلب مستحيل التحقق!

لأن عدد حبات القمح المطلوب سيكون أكبر مما تنتجه جميع الممالك ولعدة سنوات من القمح . لقد أوجد البيروني هذا العدد الهائل من خلال المجموع :

$$1+2^1+2^2+...+2^{63}=2^{64}-1$$

الذي يعرف بالسلسلة الشطرنجية . وهذا المجموع يذكر بمجموع السلسلة الهندسية.

$$1+2^1+2^2+2^3...+2^{n-1}=2^n-1$$

وقد عمم ذلك ابن البناء المراكشي إلى السلسلة الهندسية العامة المعروفة.

نصير الدين الطوسي (١٢٠٠-١٢٧٤) ❹

في القرن الثالث عشر حصلت تغيرات كثيرة في الولايات و الممالك الإسلامية وقد أصبح المكان الوحيد الآمن في إيران مركزاً للإسماعيلية . ولحسن حظ الطوسي فقد حظي على عرض الوالي الإسماعيلي آغا خان الذي سمح له بالعمل الرياضي هناك.



نصير الدين الطوسي

وبعد الاجتياح المغولي في عام ١٢٥١ وقع الطوسي في قبضة هولاكو . ولكن الطوسي استطاع أن ينقل ولاءه إلى القائد الجديد وأن يقنعه ببناء مرصد فلكي كبير هناك .

وتقول القصة أن حديثاً دار بين الطوسي وبين هولاكو - الذي سمع بالمكانة العلمية للأخير في علم الفلك - فيقول :أنت لم تطلع إلى السماء ولم ينزل عليك ملك يخبرك فمن أين تعرف ما تعرف؟ فأجاب نصير الدين: بالحساب، فقال: إن لم تكن كاذباً فأرني من معرفتك ما أصدقك به ، فأجابه نصير الدين: في الليلة الفلانية في الوقت الفلاني يخسف القمر. فأمر هولاكو: احبسوه إن صدق أطلقناه وأحسنا إليه، وإن كذب قتلناه ! فسجن إلى الليلة المذكورة، فخسف القمر خسفا بالغا ، فصدقه هولاكو على إثر ذلك وآمن به، وسمح له بخدمته كخبير علمي كما سمح له في عام ١٢٥٧م (٦٥٧هـ) بإنشاء المرصد الفلكي المطلوب في مدينة مراغة. وقد عمل من هناك بالفلك وطور الأجهزة الفلكية الخاصة بالمراقبة والأرصاد وربما استفاد كوبرنيك من ذلك لبناء نظامه الفلكي.

بالإضافة إلى الفلك فقد عمل الطوسي في حقول متعددة وله انجازات كثيرة في علم المثلثات وفي الهندسة ، حيث وضعها في دراسات متسلسلة ومنظمة متابعة لأعمال من سبقوه من العرب واليونانيين. ولا شك أنه كان على اطلاع واسع بتاريخ الأقدمين وعلومهم. فقد عرف أن ميناخيموس أجاب على طلب الإسكندر (الذي رغب بطريق مختصرة للهندسة) بالقول: ياسيدي! لاتوجد طريق معبدة (خاصة بالملوك) للوصول إلى الهندسة. ورداً على ذلك فقد ادعى نصير الدين الطوسي أنه وجد طريقاً مختصرة للهندسة قدمها للخليفة هولاكو . ولا نستغرب ذلك إذا عرفنا أن هذه الطريق تعتمد على التعبير عن الهندسة بواسطة الحساب أو التحليل . وقد فهم فيما بعد أن هذه الطريق تتمثل بالهندسة التحليلية التي مشى عليها ديكارت بعد أن رصفها وعبدها له نصير الدين الطوسي.

معركة مستمرة ❺

ذكرنا في الفصل السادس أن إقليدس في كتابه العناصر بنى هندسته على أساس خمس مسلمات منها مسلمة التوازي أو المسلمة الخامسة. وهذه المسلمة هي :

"من نقطة خارج مستقيم يمكن إنشاء مواز وحيد".

وقد قلنا أن هذه المسلمة كانت مثيرة للجدل الرياضي بحيث اعتقد البعض أنه بالإمكان البرهان عليها ، اعتماداً على بقية المسلمات.

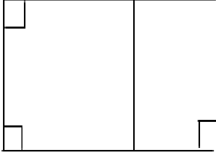
وقد حظيت هذه المسلمة باهتمام الكثيرين من الرياضيين العرب ، منم بينهم نصير الدين الطوسي.، نتيجة لشكهم بها بسبب وجود خطوط تقترب من بعضها دون أن تلتقي (كما ذكر أبن الهيثم) .ونذكر فيما يلي بعضاً ممن عملوا بهذه المسلمة وما لاحظوه فيها:

١- لاحظ ابن الهيثم وجود خطوط تقترب من بعضها دون أن تلتقي كما هو الحال في القطع الزائد وخطوطه المقاربة فكانت أول الشكوك بهذه المسلمة.

٢- لقد حاول أيضاً كل من أبي العباس النيرازي وثابت ابن قرة وابن الهيثم وابن سينا وغيرهم إثبات هذه المسلمة. وقد ادعى العباس أبن سعيد الجواهري (٨٢٠- ٨٨٠م) إثبات صحتها ولكن الطوسي بين الخطأ في البرهان.

٣- وضع عمر الخيام رسالة تبحث في التوازي حاول فيها البرهان على مسلمة التوازي (ولكن بإضافة مبدأ: الخطان المتقاربان من بعضهما يتلاقيان ومن المستحيل تباعدهما من جهة التقارب). ويفهم من هذا البرهان أنه عرف تطابق هذه المسلمة مع القضية: أن مجموع زوايا المثلث تساوي إلى قائمتين.

٤- نصير الدين الطوسي في كتابه "الرسالة الشافية عن الشك في الخطوط المتوازية " انتقد بشدة سابقيه (أبن الهيثم ، عمر الخيام ...) في براهينهم للمسلمة واستعد بنفسه للبرهان عليها معتمدا على طريقة عمر الخيام نفسها فيما يخص الزاوية الأصغر والزاوية الأكبر في المستطيل .



فمن من خلال الشكل الرباعي(المجاور) حاول أن يثبت أن الزاوية العليا فيه قائمة ، وبمناقشة حالتي الزاوية المنفرجة والحادة ، اعتقد (مثله مثل عمر الخيام) أنه توصل إلى التناقض مما يعني أن الزاوية ستكون دائماً قائمة . ولكن ابنه صدر الدين (الذي كان رياضياً أيضاً) نبهه إلى خلل في المحاكمة، فوضع فرضية أخرى مكافئة لفرضية إقليدس في الخطوط المتوازية والأعمدة وبقي الخلل قائماً. ولكن المهم في هذا العمل أنه نشر في إيطاليا عام ١٥٩٤ ودرس من قبل الهندسيين الأوروبيين وخصوصاً ساكيري في بداية القرن الثامن عشر. فكانت تناقضات الطوسي أساساً لبدايات اكتشاف الهندسة غير الإقليدية التي أنهت معركة المسلمة الخامسة.

ملاحظة: غوغل يحتفل بذكرى ميلاد نصير الدين الطوسي :منشور في: ١٢:٣٣ م، فبراير ١٨، ٢٠١٣ بواسطة ipa 2 مشاهدات : ١٤٠٣
بغداد (إيبا)..احتفل محرك البحث "غوغل" بذكرى ميلاد العالم الفارسي المعروف بـ" نصير الدين الطوسى"، المولود ١٨ شباط ١٢٠١، وهو عالم فلكي وبيولوجي وكيميائي ورياضي وفيلسوف وطبيب وفيزيائي، حيث وصفه المؤرخ ابن خلدون بأنه أحد أعظم علماء الفرس.



الكاشي (١٣٨٠-١٤٢٩) ❻

بعد نصير الدين الطوسي آلت الرياضيات العربية ، ومعها الحضارة العربية ، إلى الانحسار فخلال القرنين التاليين لم نسمع بأسماء هامة تذكر في هذا المجال، حتى ظهر اسم الكاشي في القرن الخامس عشر.



الكاشي

فقد عمل في الرياضيات والفلك بعناية الأمير ألوغ بيغ (Ulugh Beg) ، حفيد القائد المنغولي المعروف تيمورلنك . فقد أقام له مركزاً علمياً في سمرقند يتضمن برج مراقبة فلكي يساعده مجموعة من العلماء الذين تجمعوا في هذا الوقت هناك . وقد ألف كتاباً بهذا الخصوص اسمه (نزهة الحدائق) يتضمن تعميماً لنظرية ذي الحدين (التي عمل بها عمر الخيام) إلى أسس كسرية وأسس صحيحة سالبة (وهو يكون قد سبق نيوتن في هذا) . وقد وردت ، في هذا الكتاب ، المقاييس:

- الفرسخ ٢٠٠٠ قصبة
- القصبة ٦ أذرع
- الذراع ٢٤ أصبع
- الأصبع ٦ مرات عرض حبة الشعير.

وأكثر ما اشتهر به الكاشي هو استخدامه للكسور العشرية بالنظامين العشري والستيني. ويبدو أن الكاشي كان ضليعاً ، في الحسابات، في كل من هذين النظامين! فقد أوجد قيمة

تقريبية للعدد بي(π) لم يسبقه أحد في ذلك من قبل ، حيث بين بدقة أن العدد 2π يعطى بالنظامين العشري والستيني كما يلي:

٦,٢٨٣١٨٥٣٠٧١٧٩٥٨٦٥

$$6;16,59,28,34,51,46,15,50$$

وبذلك يكون العدد بي ، بحسب حساباته ، من الشكل:

٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣٢٥

وقد وردت عبارة كلامية تساعد في تذكر هذا الرقم هي:

"هنا وهناك و هنالك اصطرلابان قد انتظما يريان نجم عطارد"

هذه الدقة في حساب العدد بي لم يصلها أحد بعد الكاشي قبل نهاية القرن السادس عشر حيث ظهر العدد بي بالشكل

٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩

ومن الملفت ورود عبارة كلامية باللغة الانكليزية تساعد في تذكر هذا الرقم هي:

How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures quantum mechanics involving

وللعدد π تاريخه الخاص حيث خضع لتحسينات متتالية مكلفة ومريرة ، عبر التاريخ، ومنذ ٤٠٠٠ سنة. ولكن مما سهل الأمر في القرون الأخيرة هو أمكانية وضع هذا العدد بشكل صيغ غير منتهية مثل صيغة واليس (Wallis) المعروفة:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \ldots}$$

وعتدئذ يكون بالإمكان حساب العدد π بالدقة التي نشاء .

وربما كان شرانك (Shrank) آخر ضحايا العدد π وأكبرها ، فقد ضحى بـِ ٢٠ سنة من عمره (من ١٨٥٣ حتى ١٨٧٣) لتحسين الرقم إلى ٥٠٠ رقم بعد الفاصلة. ولحسن

حظه فقد توفى قبل ظهور الكومبيوتر ، الذي بإمكانه إعطاء مليون رقم بعد الفاصلة في دقائق ، وإلا لأصيب بصدمة أنه أضاع ٢٠ سنة من عمره مقابل دقيقة واحدة من عمر الكومبيوتر.

الخلاصة ❼

دام بيت الحكمة ٢٠٠ سنة تقريباً وكانت هذه الفترة عصراً ذهبياً للعلوم وللرياضيات العربية والإسلامية حيث كان التشجيع كبيراً للعلم من قبل الدين والدولة. وتصلح لهذه الفترة تسمية الرياضيات الإسلامية أو الرياضيات العربية ، نظراً لعدم اقتصارها على العلماء العرب، فقط بل على علماء آخرين مسلمين وغير مسلمين قدموا من شتى الأنحاء للدراسة والابتكار . وبالرغم من التشجيع، الذي تكلمنا عنه ، من قبل الدولة، إلا أنه وجد بعض الحكام أو الولاة الذين ناهضوا الرياضيات والعلماء الرياضيين، باتهامهم لهم بالإلحاد حيناً وبالخروج عن التعاليم الإسلامية حيناً آخر، وبحجة أخرى أن لا حاجة لعلومهم لأن كل شيء موجود في القرآن . بالإضافة إلى ذلك فقد حدثت تغيرات كثيرة في المنطقة ناتجة عن الغزو الصليبي من الغرب أو الغزو التتاري من الشرق . نتيجة لذلك ترك معظم العلماء أو الفلاسفة بغداد متجهين إلى جهات أخرى كالشرق مثل إيران أو الغرب مثل الأندلس حيث غدت قرطبة مركزاً علمياً شهيراً أمه الطلاب من جميع أنحاء أوروبا للعلم والتعلم ونقل المعلومات .

والخلاصة أن الرياضيين العرب والمسلمين قاموا بتطوير كبير للجبر والهندسة والحساب الذي أتى إليهم من العهد البابلي واليوناني. كما قاموا بإضافات جدية وجديدة من خلال استخدام ملاحظات الإغريق في البراهين وإضافة طرقهم الخاصة لتثبيت أقدام الجبر .

وقد انتقلت معظم هذه الأعمال إلى أوروبا فأعطت الأوروبيين أول لمحة عن الجبر والهندسة. ولكن الكثير من هذه الأعمال لم تصل، مما اضطرهم للبحث عن الأفكار المفقودة بأنفسهم ليتبين فيما بعد أن الكثير منها ، الذي عزي للأوروبيين، كان معروفاً للعلماء العرب.

أخيراً من المؤسف القول إن الحكام ورجال الدين تناصبوا العداء، في حالات كثيرة، مع العلماء والفلاسفة ولم يتوفقو إلى إيجاد لغة مشتركة للتفاهم وللتوفيق بين القدرية والسببية، بين العلم والدين. ولو حدث ذلك لأمكن متابعة التطور العلمي والأدبي في الشرق العربي ولما احتجنا إلى مئات السنين ليسبقنا الأوروبيون في صناعة التكنولوجيا والحضارة.

ولم يختلف الأمر بالنسبة للكنيسة حيث لم يحدث تفاهم بين الفلسفة اليسوعية والمفاهيم الفلسفية السائدة أيام اليونان والرومان ، وحيث تم إغلاق مدرسة أفلاطون في أثينا في عام ٥٢٩ م ، من قبل الإمبراطور الروماني جوستينيان، وكان على أوروبا أن تنتظر ١٠٠٠ عام للخروج من عصر الظلمات.

تساؤلات



① عمل الكاشي في نظرية الأعداد حيث أوجد قيمة الصيغة

$$1^4 + 2^4 + \ldots + 10^4$$

كيف نجد هذه القيمة ؟

② كيف نبرهن على صحة قانون مجموع السلسلة الهندسية التي يعود برهانها إلى المراكشي:

$$a + ar^1 + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

③ حل المعادلة الآتية جبرياً (وهندسياً) بطريقة عمر الخيام :

$$x^3 = x + 20$$

④ بين نصير الدين الطوسي أن مجموع عددين فرديين وتربيعيين لا يمكن أن يكون عدداً تربيعياً . برهن على صحة ذلك باستخدام خواص الأعداد التربيعية الفردية والأعداد التربيعية الزوجية.

⑤ ديوفانتوس وأثناء دراسته لتوزيع مجموع مربعين إلى مجموع آخر لاحظ أن العدد ٦٥ يمثل مجموعاً لمربعي عددين ، لأنه جداء للعددين ٥ و ١٣ الذي يمثل كل منهما مجموعاً لمربعي عددين. وقد اكتشف الخازن (٩٥٠ م) علاقات عامة تخضع لها مثل هذه الأمثلة وهي:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac\pm bd\right)^2+\left(bc\mp ad\right)^2$$

أثبت صحة هذه العلاقات.

⑥ أوجد هندسياً الحل التقريبي للمعادلة :

$$x^3+2x^2+10x=20$$

من خلال رسم المنحنيين:

$$\left(x+2\right)\left(y+10\right)=40\ ,\quad y=x^2$$

⑦ إحدى نظريات عمر الخيام نعرضها بالرموز الحديثة كما يلي:

إذا كان $b>0$, $x=\frac{-c}{b}$, $x\in\Re$ فإن حل المعادلة

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

ينتج من تقاطع الدائرة

$$\left(x+\frac{a+c/b}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a-c/b}{2}\right)^2$$

مع القطع الزائد $x\left(x-\sqrt{b}\right)=c/\sqrt{b}$

⑧ أعطى كل من أرخميدس و بطليموس والخوارزمي للعدد π على الترتيب، القيم التقريبية التالية :

$$\pi=\frac{22}{7},\ \pi=3+\frac{8}{60}+\frac{3}{360},\ \pi=\sqrt{10}$$

أيها أقرب إلى الحقيقة؟

⑨هناك من يقول غن العرب إنهم أتوا بعلوم الأقدمين وحفظوها في الثلاجة ريثما أصبحت أوروبا جاهزة لتلقيها لاستخدامها . هل ترى هذا الكلام منصفاً وكيف تعلق على ذلك؟

⑩ كيف مهد الرياضيون العرب لظهور الهندسة التحليلية في الغرب؟

البدايات الأوروبية

الليل الطويل ❶

مع نهاية الرياضيات اليونانية سقطت الإمبراطورية الرومانية في عام ٤٧٦ وبقيت الأمم الأوروبية تتشكل خلال ليل طويل امتد ١٠٠٠ سنة . وخلال هذه الفترة لم يسجل ظهور رياضيين مميزين باستثناء رياضي واحد فقط في القرن الثالث عشر هو فيبوناسي المعروف بليوناردو من بيزا.

ولكن لا ننسى أنه وخلال هذا الليل الطويل انبثق من الشرق وهج للحضارة العربية والإسلامية ، في القرون الأخيرة من الألفية الأولى ، عم إشعاعها نحو الهند والصين شرقاً و نحو إفريقيا والأندلس غرباً. وفي هذه الفترة ، وخصوصاً في القرن الثاني عشر وما بعده، بدأت المعلومات تنتقل إلى أوروبا، من الشرق ومن خلال التراث الباقي في الأندلس. وقد تم ذلك من خلال الترجمة التي قام بها اليهود من العربية إلى الإسبانية ، والمسيحيون من الإسبانية إلى اللاتينية، وأحيانا من العربية مباشرة مثل أعمال الخوارزمي وثابت ابن قرة في ترجمتهما للماجست (بطليموس) وللعناصر (إقليدس).

فيبوناسي (١١٨٠- ١٢٥٠ م) Fibonacci ❷

كان فيبوناسي (أو ليوناردو من بيزا) تاجراً مشهوراً، وكان كثير التنقل والسفر. ولكن اهتمامه بتلقي المعلومات الرياضية ونقله لها كان أكبر من تبادلاته التجارية. في كتابه (Liber Abbaci) فسر النظام العربي للأعداد ، التي تستعملها أوروبا حتى الآن. وأول

ما نقل هذا النظام إلى إيطاليا ولكنه استخدم في حينها إلى جانب النظام الروماني للأعداد، الذي كان سائداً ، خوفاً من حصول أخطاء غير متوقعة .



فيبوناسي

① **المباريات:** في عام ١٢٢٥ نظم الإمبراطور فريدريك الثاني مباراة في الرياضيات حضرها فيبوناسي وأجاب على جميع الأسئلة ونال جميع الجوائز. من بين هذه الأسئلة كان السؤالان التاليان:

أ- حل المعادلة

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

وقد عرفت هذه المعادلة فيما بعد بمعادلة فيبوناسي .

ب- أوجد الكسر $\frac{a}{b}$ بحيث يكون كل من المقدارين $5 \pm \left(\frac{a}{b}\right)^2$ عدداً مربعاً.

وقد ذكرنا أن ديوفانتوس عالج مثل هذا الموضوع من أجل المثلثات القائمة. غير أن فيبوناسي لم يستخدم أسلوب ديوفانتوس في الحل بل ذهب إلى طريقة أكثر تعقيداً

② **الأعداد السالبة**: كان فهم فكرة الأعداد السالبة أمراً شاقاً، لذلك مر وقت طويل قبل أن تدخل هذه الأعداد إلى مجالس الرياضيات نتيجة للغموض الموجود فيها. أول من تجرأ إلى النظر إليها بالتفهم هو فيبوناسي. فقد كان يعالج، مرة، مسألة مالية فاتضح له أنه لا يمكن حلها إلا باستخدام عدد سالب . فلم يلجأ إلى الهروب من هذا العدد بل جابهه مجابهة صريحة ووصفه بأنه خسارة مالية. وتوصل إلى الحل المرغوب للمسألة.

③ **فيبوناسي والأرانب**: أحد المسائل المطروحة في الكتاب ، الذي سبق ذكره، المسألة الآتية:

مسألة فيبوناسي: نفرض أن فترة حمل الأرنب هو شهر واحد وأن الأنثى تحمل مرة كل شهر بدءاً من الشهر الذي يلي تاريخ ولادتها. ولنفرض أن الأنثى تضع دائماً ،عند الولادة، مولودين مختلفي الجنس (ذكر وأنثى). كم زوجاً من الأرانب نحصل عليه في ١٢٠٧/١/٢ إذا بدأنا بمولودين جديدين في ١٢٠٦/١/١ ؟

لقد تبين أن الجواب يعطى من خلال المتتالية المتزايدة من الأعداد (عدد الأزواج):

$$1\ ,\ 1,\ 2,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 8,\ 13\ ,\ 21\ ,\ 34\ , ...$$

حيث يكون حدها العام :

$$F_1 = 1\ , F_2 = 1\ , \ldots\ ,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\ \ .$$

لهذه المتتالية ، المعروفة بمتتالية فيبوناسي، أهمية خاصة لأن لها تطبيقات أخرى في الهندسة والطبيعة تتجاوز مسألة الأرانب . إحدى هذه التطبيقات هي مسألة أيجاد القسمة بالنسبة الذهبية ، التي استخدمها الإغريق في بعض إنشاءاتهم والتي استخدمها ليوناردو دوفينشي في بعض رسوماته.

ملامح النهضة ❸

ظهرت ملامح النشاط الرياضي في القرنين الخامس عشر والسادس عشر، وقد ساعد في ذلك نشاط التجارة الإيطالية إلى الشرق وظهور سوق اقتصادية ، جديدة ، أدت إلى ظهور باحثين رياضيين في إيطاليا (وخصوصاً بعد ترجمة أعمال بعض الرياضيين العرب في القرنين الثاني عشر والثالث عشر) مثل فيرو وتارتاليا وكاردانو وغيرهم. بالإضافة إلى ذلك فقد تم ، في ذلك الحين، اختراع الطباعة وظهرت الرموز التي أعطت الرياضيات قوة وزخماً هائلين في الاندفاع نحو الأمام.

①**غريغوري ريميني** (١٣٠٠- ١٣٥٨ Gregory Remmini)**:** أول من ظهر في القرن الرابع عشر هو الرياضي غريغوري ريميني الذي خالف أرسطو في رفضه للانهاية. حيث قال بالانتقال من اللانهاية الكامنة إلى اللانهاية الحقيقية ، من خلال فكرة الإله غير المنتهي، موضحاً ذلك كما يلي: يستطيع الإله خلق لانهاية من الأحجار ويستطيع فعل ذلك من خلال قطع كل حجر إلى النصف في كل من اللحظات :

$$t = 0 \, , \, \frac{1}{2} \, , \, \frac{3}{4} \, , \, \frac{7}{8} \, ,....$$

إلى ما لانهاية في الصغر.

②**جوهانس ريغيومونتانوس** (١٤٣٦-١٤٧٦م Johannes) **:** هو من ألمانيا وهو أول من أعطى رموزاً للقوى مثل x و x^2 و x^3 في بعض كتبه التي ألفها. وفي رحلته الرابعة إلى أمريكا أخذ كريستوف كولومبوس معه نسخة من أحد مؤلفاته المتضمنة توقع الخسوف في ٢٩ شباط ١٥٠٤ لإخافة الهنود في جامايكا.

③ **باسيولي لوقا** (١٤٤٥-١٥١٧ م Pacioli Luca) : الراهب لوقا هو إيطالي الجنسية. ألف كتاباً حول كثيرات الوجوه المنتظمة . وقد وضح ليوناردو دافينشي (١٤٥٢- ١٥١٩م) هذا الكتاب من خلال التطبيقات في الرسم والنحت . كما نشر كتاباً في الجبر عام ١٤٩٤ سماه "مجموعة الحساب" شرح فيه مكتشفات الجبر بكاملها حتى ذلك التاريخ وختمه بملاحظة مزعجة هي أن الرياضيين عجزوا عن حل المعادلة التكعيبية بطرائق جبرية فتركوها لغير الرياضيين. هذا وتوجد لوحة شهيرة للوقا في المتحف الوطني في نابولي مع نموذج لكثير الوجوه المنتظم ذي العشرين وجهاً.

④ **ميخائيل ستايفل** (١٤٨٧-١٥٧٦م Michael Stifel) **.** بالإضافة إلى كونه راهباً ذا مرتبة رفيعة في الكنيسة فقد عمل ستايفل في الرياضيات. فمثلاً استخدم الرموز $1A, 1AA, 1AAA$ للدلالة على القوى $A, \ A^2, \ A^3$.

وقد كانت له طريقته في تحليل الكلمات، من خلال تفسيرها بواسطة القيم العددية لأحرف الكلمة ، وقد حاول تطبيق ذلك في الإنجيل ، حيث توصل إلى تكفير البابا ليو العاشر، كما قادته حساباته إلى أن العالم سينتهي في ١٥٣٣/١٠/١٨ . ونظراً لشخصيته المرموقة فقد صدقه الإخوة والأخوات فصرفوا أموالهم وبذروها لهذا السبب. وقد دهش ستايفل كثيراً بعد فوت التاريخ المذكور، لأنه بدلاً من أن يجد نفسه في الجنة وجد نفسه في سجن ويتبورغ (Wetborg) .

سر المكعب 4

درست المعادلات التكعيبية، منذ القدم، بدءاً من مسألة مضاعفة المكعب . وقد درس أرخميدس مسألة قطع كرة بمستو، بحيث يكون أحد الجزأين ضعف الآخر (وهي تقود إلى مسألة إيجاد نسبة الحجم الطافي إلى الحجم الغاطس عندما نضع كرة ما في الماء). وقد تبين أن حل هذه المسألة يتحول إلى حل المعادلة التكعيبية:

$$x^3 - 3x + 2/3 = 0.$$

وفي عصر النهضة كان الرجال الإيطاليون، الذين حلوا المعادلة التكعيبية، زمرة عجيبة من الرياضيين لم يشهد التاريخ أكثر منهم طرافة! فقد كان أكثرهم رجالاً علموا أنفسهم بأنفسهم ، يكاد لا يفصلهم فارق ملموس، من المنشغلين بمسائل المحاسبة اليومية والفائدة المركبة وقضايا التأمين التي زادت الحاجة إليها في ذلك العصر، وإن كان كبار علماء الجبر الإيطاليين ارتفعوا فوق منزلة المحاسبين العمليين فإنهم ظلوا إلى حد بعيد قوما نفعيين أذكياء تعرفهم فئات المقامرين واللصوص، الذين اكتظت بهم الأزقة الخلفية المعتمة في عصر النهضة ، بقدر ما تعرفهم كراسي المكاتب الجامعية التي كانوا دائماً لها

طامحين وعلى بلوغها أحياناً قادرين. وكانوا ينشرون على الناس مهاراتهم فيعقدون فيما بينهم وأمام الجمهور، وأحياناً في بلاط الملوك ، مباريات في حل المسائل، يعرضون فيها مقدرتهم ويكسبون من دخلها ما يكفل عيشهم.

في جو هذا الصراع نشبت الحرب حول المعادلة التكعيبية! وكان من بين من اشترك في هذه الحرب ، من خلال المنافسات ، فيرو وتارتاليا وكاردانو وفيراري.

① **فيرو** (Ferro 1465-1526) **:** بحث الرياضيون في البداية ، ومنهم فيرو، عن الحل التقريبي بطريقة هندسية للمعادلة التكعيبية لأنهم اعتقدوا في البداية بعدم وجود حل جبري لها (نتذكر أن ميناخيموس بحث عن الحل في تقاطع القطعين $y = x^2/2$ و $x = y^2$).

شغل فيرو منصب أستاذ في جامعة بولونيا بإيطاليا . وكان فيرو أول من تحدى باسيولي لوقا بشأن المعادلة التكعيبية ، وكذلك كان أول من وجد حلاً جبرياً لنوع معين من المعادلات التكعيبية:

$$x^3 + bx = c \qquad (*)$$

إلا أنه ترك ذلك سراً ليتفوق به على منافسيه من الرياضيين عند الحاجة . ولكن وقبل موته أعطى السر لأنطونيو فيور (Fior).

②**تارتاليا**(Tartaglia 1499**)**. عندما غزا الفرنسيون ، في عام ١٥١٢ ، مدينة بريسيا (Prescia)، المدينة التي كان يعيش فيها تارتاليا، سأله أحد الجنود عن اسمه ولما لفظه (وهو يعني المتأتئ) ضرب حنكه بالسيف مما زاده تأتأة. كان تارتاليا قد أصبح واحداً من أذكى القادرين على حل المعادلات التكعيبية في إيطاليا. ففي منافسة بينه وبين المتحدي فيور (الذي أخذ سر المعادلة التكعيبية من فيرو) تغلب تارتاليا على فيور، حيث حل كل منهما المعادلة (*) ولكن ومن اجل حل بعض المعادلات الأخرى مثل المعادلة: $x^3 + ax^2 = c$

فقد نجحت طريقة تارتاليا في الحل بينما لم تنجح طريقة فيرو في أي منها مما أكسب تارتاليا الجوائز المستحقة . وأخيراً قضى تارتاليا بقية حياته على خلاف مع كاردانو بسبب الخلاف حول ملكية السبق في حلول المعادلات.

كاردانو (١٥٠١ – ١٥٧١) ❺ Cardano



كاردانو

يقول كاردانو في مذكراته : بالرغم من محاولة والدته الإجهاض به فقد ولد في ١٥٠١/٨/١٤ وبقي لفترة طويلة مكتوم النفوس. تزوج في عام ١٥٣١ من الفتاة (لوسيا) وهي في سن الخامسة عشرة . وقد كان مقامراً مدمناً لا يتورع عن بيع أثاث بيته أو رهن مجوهرات زوجته في أمل تغير حظ ورقته التعيسة . كان مردود المقامرة سيئاً على العائلة ولكنه جيداً على الرياضيات، وتحديداً على علم الاحتمالات، فهو يعد الأب الروحي لهذه المادة.

وقد درس كاردانو الطب والرياضيات والفلك والأبراج وكذلك الاحتمالات. استنتج من حساباته الفلكية أنه لن يتجاوز ٤٥ سنة ولكنه عاش ٧٠ عاماً . لم يقبله معهد الفيزياء في ميلانو لأن تاريخ ولادته غير مسجل، ولكن بعد عدة سنوات استطاع إقناع المعهد بقبوله فغدا (رقم واحد) في الطب والفيزياء واشتهر حتى على مستوى أوروبا.

كان أحد زبائنه أسقف اسكوتلاندا جون هاملتون، الذي كان يصاب بنوبات الأكزيما، فذهب إلى هناك لمعالجته . وبعد دراسة عاداته تبين له أن السبب هو الفراش ونصحه بتغيير الفراش من ريش إلى حرير والوسادة إلى قطن . فنجح نجاحاً باهراً جعل الأسقف يغدق عليه بالعطايا.

في عام ١٥٣٥ دعا كاردانو تارتاليا إلى بيته في ميلانو واستدرجه ليخبره عن المعادلة التكعيبية . فأخبره بشرط أن يبقي الأمر سراً ! فأقسم له بجميع القديسين أنه لن يخبر أحداً. ولكنه وفي عام ١٥٤٣ عرف أن جزءاً من السر موجود عند فيور، بين أوراقه ، وباستطاعة أي شخص الوصول إليها ونشرها. بهذه الحجة نشر كامل الخبر في كتابه : الفن العظيم (Ars Mange) ١٥٤٥ . بالرغم من أن كاردانو أنصف تارتاليا بأن أعزى إليه النتيجة ، إلا أن هذا الأخير بقي غاضباً لسببين: الأول هو اليمين الكاذب والثاني سحب الورقة الرابحة منه في المنافسات . بالإضافة إلى حلول المعادلات التكعيبية فإننا نجد في هذا الكتاب أيضاً حل المعادلة من الدرجة الرابعة، التي يعزى حلها للرياضي فيراري . لقد كان فيراري أحد أصدقاء كاردانو ، حيث كان يرسله أحيانا لإجراء المنافسات بدلاً منه (وقد ربح مرة مع تارتاليا) . وهكذا استطاع كاردانو في كتابه المذكور أن ينشر على العالم اكتشاف هذين الرجلين فأعطى بذلك في آن واحد الحلول العامة للمعادلات التكعيبية والرباعية وأذاع بذلك أهم اكتشافين جبريين وجدا منذ وفاة ديوفانتوس قبل ١٣٠٠ عام. وفي هذا الكتاب أيضاً نجد أول استخدام للأعداد العقدية. فقد قبل كاردانو بمفهوم الأعداد السالبة وأبدع، من خلال ذلك، نوعاً جديداً من الأعداد مكونة من قسمين، سمى أحدهما القسم التخيلي . تعرف مثل هذه الأعداد اليوم بالأعداد العقدية (أو المركبة). وهو بذلك يكون قد تجاوز العدد السالب لما هو أكثر حيرة وخيالاً وهو جذر العدد السالب. والأهم من ذلك فقد تبين ، فيما بعد، أن بعض حلول المعادلات التكعيبية لها شكل هذه الأعداد الجديدة.

لقد كانت حياة كاردانو مليئة بالمآسي! فقد ماتت زوجته في سن مبكرة وأعدم أبنه جيامبا لدس السم لزوجته ، كحل وحيد لخياناتها الفاضحة (لم تكن هذه العادة غريبة في ذلك العهد). وقد كان أبنه الآخر (ألدو) لصاً فزج في السجن . و أخيراً حوكم بتهمة الكفر ولكن المحكمة ولحسن الحظ ، أعطت حكماً مخففاً وكان ذلك قبل وفاته بأربع سنوات.

فييتي (١٥٤٠ ١٦٠٣) ❻ Viete

عاش فييتي في فرنسا وكان محامياً وعضواً في البرلمان . وقد ساعد هنري الرابع في حربه ضد الأسبان بأن كشف شيفرتهم بشكل بارع . من إحدى مقولاته: الرياضيات ليست تفاعلاً كيميائياً يظهر بعده الذهب من الدخان وإنما هو معدن حقيقي يجب الحفر في مناجم التنانين للوصول إليه.

من الإنجازات التي تعزى لفييتي هو ملاحظته أنه إذا كان :

$$a_1 = \sqrt{1/2}\ ,\ \ a_2 = \sqrt{(1+a_1)/2}\ ,\dots,\ \ a_{n+1} = \sqrt{(1+a_n)/2}$$

فإن

$$a_1 \cdot\ a_2 \cdot a_3 \cdot \dots = 2/\pi$$

عير أن أهم إنجازات فييتي هو استخدم المثلثات لحل المعادلة من الدرجة الثالثة. فقد أدرك أن النسب المثلثية صالحة لحل المعادلات الجبرية. وأن سلسلة الأعداد الواردة في جدول ما قادرة على تمثيل القيم المتتالية التي يأخذها مقدار مجهول ما ، وإن قولنا جيب الزاوية x هو y يمكن كتابته بالشكل: $y = sin\,x$ وهي لا تقل شأناً عن أية معادلة أحرى مثل $y = x^2 + 2x$ أو غيرها. غير أن العبقرية في عمل فييتي هو أنه ، بنظرته الثاقبة هذه ، فتح آفاقاً عريضة لاعتبار المعادلة $y = sin\,x$ ممثلة بمخطط بياني يتم التقابل فيه بين النقاط . فكان ذلك الخطوة الأولى لظهور ما يعرف بالتوابع المثلثية.

وبشكل مشابه فقد أبدع الاسكوتلندي جون نابير(j. Napier) بإنشاء فكرة اللوغاريتمات ثم التوصل إلى الجداول اللوغاريتمية التي وفرت على العلماء والمهندسين الكثير من الحسابات الطويلة والمعقدة.

حدث كل ذلك قبل خمسين عاماً من نشر ديكارت لهذه النتائج ، في كتابه "المنهج"، مستخدماً نظامه الديكارتي الجديد . فقد سمح هذا النظام ، بعد تحسينه ، برسم منحنيات

للعلاقات المثلثية السابقة كمنحني للعلاقة (أو التابع) :

$$y = f(x) = \sin x$$

وكذلك برسم منحنيات للعلاقات اللوغاريتمية كمنحني للعلاقة :

$$y = f(x) = \log x$$

ومن هذا النصر العظيم ولد فرع هام من فروع الرياضيات المتقدمة هو التحليل الرياضي المبني على مفهوم (المتحول والتابع).

تساؤلات



① ما هو جواب مسألة الأرانب التي وضعها فيبوناسي؟

② برهن أن حل المسألة ٢ في أولمبياد فريدريك الثاني هو $41/12$

③ برهن أنه في المثلث القائم يكون
مربع نصف الوتر $\mp$ مساحة المثلث = عدداً مربعاً

④ بين أن العدد $6(1+2^2+...+x^2)$ متناسب من أجل أي عدد طبيعي x .

⑤ في كتاب كاردانو ، حول نظرية الألعاب والحظوظ ، وردت المسألة الآتية (التي أعطى كاردانو جواباً دقيقاً لها): عند رمي ثلاث حجرات من النرد ثلاث مرات ما هو احتمال الحصول على الرقم ١ مرتين ،على الأقل، في كل مرة ؟

⑥ في كتاب كاردانو أيضاً وردت المسألة الآتية:
عند رمي حجرتي نرد ثلاث مرات ما هو احتمال الحصول على الرقم ١ مكرر مرتين، على الأقل، مرتين ؟ أعطى كاردانو جواباً خاطئاً هو $2/5$ بين أن الجواب الصحيح هو $5203/23328$

⑦ لكاردانو أيضاً تعود المسألة الآتية: كيف تقسم ١٠ إلى عددين يكون جداؤهما ٤٠؟

⑧ في كتاب تارتاليا حول نظرية الأعداد وردت المسألة(الحزورة) الآتية:
ثلاثة رجال مع زوجاتهم يريدون قطع نهر بواسطة قارب يتسع لاثنين فقط . كيف يستطيعون القيام بذلك علماً أنه وبسبب الغيرة لن يترك أي زوج زوجته منفصلة عنه ، مع أي من الرجلين الآخرين ، على إحدى الضفتين.

⑨ أيضاً في كتاب تارتاليا وردت المسألة الآتية:
ثلاثة أشخاص يودون تقسيم ٢٤ لتر من الزيت ، الموجود في وعاء واحد، فيما بينهم بالتساوي. كيف يستطيعون القيام بذلك إذا كان لديهم فقط ثلاثة أوعية بسعة ٣ و٥ و١٣ لتر؟

⑩ كيف كان أثر حلول المعادلة التكعيبية على ظهور الأعداد العقدية وتطورها؟

عصر النهضة

الانقلاب ❶

في الوقت التي انطفأت فيه شعلة الحضارة العربية في الشرق بدأت تظهر معالم حضارة أخرى في الغرب في نهاية القرن السادس عشر. ولا شك أن دعامة هذه الحضارة الجديدة استندت، بشكل رئيسي، على الكمية الهائلة من المعلومات المتراكمة عن العلوم اليونانية والعلوم العربية التي انتقلت إليهم من هذا الشرق. ولابد أن تأثير هذا الانتقال كان كبيراً وعلى مستويات متعددة : سياسية وتجارية وعلمية وغيرها، مما أسس لظهور الثورة العلمية و الانقلاب على معظم المفاهيم والأفكار السائدة في الغرب الأوروبي .

من هنا بدا القرن السادس عشر ، في أوروبا ، زاخراً بالأفكار الجديدة والأفعال الجريئة ! فالبروتستانتيون يعلنون على الملأ قواعدهم الكنسية الصارمة ، وتجار الفرو الهولنديون يعقدون الصفقات في مقاطعة مانهاتن ، والأمم الأوروبية المتنافسة تتآمر لبناء الإمبراطوريات الشاسعة ، والمستوطنون الانكليز يكافحون في سبيل البقاء في جيمس تاون . وكان عشاق المسرح اللندنيون يبكون وفاة شكسبير الحديثة ، ومونتوفردي يلحن أولى الأوبرات العالمية الكبرى . وكان وليام هارفي قد ابتدأ بإلقاء سلسلة محاضراته التي وصف فيها القلب على أنه مضخة لدفع الدم وليس مركزاً للمشاعر والأحاسيس . وكان كبلر يستعد لنشر القانون الثالث من قوانينه التي تصف حركة الكواكب حول الشمس وصفاً دقيقاً. وكان ذلك متابعة لأفكار الفلكي البولندي كوبرنيك ، الذي تمثلت بأن الشمس هي مركز المجموعة الشمسية ، والتي أدانها المركز البابوي في روما ووصفها بأنها

هرقطة . أما غاليليو، الذي كان مشغولاً بمنظاره الفلكي الجديد ، فقد تلقى إنذاراً بأن يتخلى عن دعمه لهذه الفكرة ليتجنب غضب الكنيسة.

مثل هذا الزخم الكبير في النشاط ، يذكر بالزخم اليوناني الذي عاشته أثينا في القرن الرابع قبل الميلاد. فكما ظهر هناك التجار والأدباء والمحامون والعلماء والفلاسفة الذين أخضعوا جميع المذاهب والعقائد لنظام العقل ، فقد حدث الأمر نفسه هنا ، وأعيد من جديد طرح جميع المسائل السابقة العقلية والمسلكية ، المتعلقة بالفلسفة اليونانية ، ولكن بحلة جديدة وبأساليب معالجة جديدة ، ولم يعد هناك من محرمات في طرح اي مسائل أو مواضيع أخرى لم تكن مطروحة من قبل .

كان هذا هو العالم الذي اقتحمه الفلاسفة والرياضيون الأوروبيون في بداية القرن السابع عشر، مثل فيرما وديكارت وباسكال وغيرهم .

بيير فيرما (١٦٠١– ١٦٦٥) ❷ Pierre Fermat

بالإضافة إلى النشاطات الأخرى التي شهدها القرن السابع عشر فقد شهد نشاطاً مميزاً في الرياضيات يمكن تسميته بالثورة في الرياضيات . وقد مثل هذا العصر مجموعة مميزة من الرياضيين أولهم بيير فيرما.



فيرما

كان فيرما رئيس البرلمان في طولوز (فرنسا) وعمل في الرياضيات في أوقات فراغه فقط كهواية . فهو لم يهتم بالبراهين قط ولذلك لم يهتم بالنشر. وقد قال عنه بوير (Boyer) في كتابه تاريخ الهندسة التحليلية : الهندسة التحليلية نتاج مستقل لاثنين غير رياضيين هما:

- **فيرما**: محام مهتم بالهندسة الإغريقية.
- **ديكارت**: فيلسوف رأى في الأفكار الرياضية تجسيداً للأفكار المعقولة .

اشتهر فيرما في نظرية الأعداد من خلال نظريتين هما:

أ- نظرية فيرما الصغيرة: إذا كان p عدداً أولياً و m عدداً طبيعياً كيفياً كان p أحد عوامل المقدار $m^p - m$.

لبرهان هذه الحقيقة يمكن استخدام الاستقراء الرياضي .

ب- نظرية فيرما الكبيرة (فرضية): أثناء قراءته لكتاب ديوفانتوس، في الحساب، ومروره عبر المعادلة $x^2 + y^2 = z^2$ كتب على هامش الترجمة، بقلم الرصاص، ما يلي: لا توجد أعداد صحيحة موجبة x,y,z بحيث يكون

$$x^n + y^n = z^n \ , \ n > 2 \, .$$

هذه الفكرة (التي عرفت بنظرية فيرما الكبيرة) وضعها فيرما كفرضية، للبرهان عليها، وهي ذات علاقة بتقسيم المكعب إلى قسمين متساويين . من المؤكد أن فيرما عرف البرهان من أجل $n = 3, \ n = 4$ أما من أجل أعداد أخرى فقد برهن عليها:

- ليجندر(Legendere) في عام ١٨٢٣ من أجل $n = 5$
- ديرخليه (Dirichlet) في عام ١٨٣٢ من أجل $n = 7$
- كومر (Comer) في عام ١٨٤٩ من أجل $n < 100$ (مع استثناء بعض الأعداد) .
- وأخيراً وفي عام ١٩٩٤ برهن عليها أندريه وايلز(A. Wiles) من أجل كل n .

رينيه ديكارت (١٥٩٦ – ١٦٥٠ م) ❸ Rene Descartes


ديكارت

رينيه ديكارت فرنسي الأصل ،عاش طفولته يتيماً ، فقد ماتت والدته بعد ولادته وقد عاش وحيداً ، إلا أنه وفي عام ١٦٣٥ رزق بفتاة (هيلين) من خادمته . وقد نذر نفسه للفلسفة وتوصل إلى نتيجة أنه ما من فكرة يمكن تخيلها ، ومهما كانت لا تصدق، إلا ومرت على ذهن أحد الفلاسفة. من هنا ظهرت عنده فلسفة الشك للوصول إلى الحقيقة (أفكر فأنا موجود) .

كان ديكارت ممن حاولوا البرهان على وجود الإله رياضياً ! فقد رأى مثلاُ أن حالة "وجود الله " تتضمنها فكرة تساوي مسافات نقاط سطح الكرة عن مركزها، وفكرة أن مجموع زوايا المثلث تساوي ٢ قائمة . لسوء حظه ظهرت ، فيما بعد، الهندسة القطعية حيث تكون مجموع زوايا المثلث أقل من ٢ قائمة (ومن بعدها الهندسة الكروية حيث تكون مجموع زوايا المثلث أكبر من ٢ قائمة) . لذلك ولكي يبقي الإله موجوداً (من وجهة نظره) توجب إضافة المثلث الفيثاغورثي إلى فكرته.

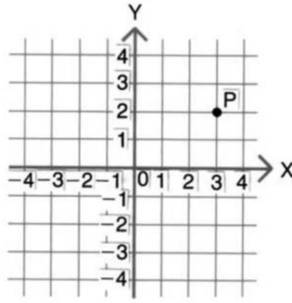
في بعض كتاباته في المعادلات الجبرية (التي تتضمن الإشارات والقواعد) يظهر تأييده لفكرة اللانهاية حيث قال: أنا أعي تماماً أن هناك حقيقة أكثر في المادة اللانهائية منها في النهائية .

ربما من أهم الكتب التي ألفها ، في الرياضيات ، هو كتاب: "الأسس الأولى لعلم الهندسة التحليلية " وافتتح هذه الهندسة بمفهوم الإحداثيات ، حيث شكل ما نعرفه اليوم بجملة

الإحداثيات الديكارتية (وهي الجملة النظامية المكونة من محورين متعامدين يعرف الأفقي منهما بمحور السينات x ويعرف الآخر بمحور العينات y وتحدد نقاط المستوي من خلال الثنائيات((x,y)). ففتح بهذا المفهوم العبقري آفاقاً جديدة لرياضيي عصره ، ولمن بعدهم ، للنظر في المعلومات الرياضية. فقد بين مثلاً ، أن جميع معادلات الدرجة الثانية :

$$F(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy + ...$$

يمكن أن ترسم بيانياً في شكل مخططات من نقاط متصلة ، فتعطي خطوطاً مستقيمة أو دوائر أو قطوعاً ناقصة أو زائدة أو مكافئة ، أي انها تعطي قطوعاً مخروطية سبق وأن درسها أبولونيوس ببراعة فائقة قبل ٢٠٠٠ سنة .



شكل٣٣

لاحظ أن الشبكة، على الشكل٣٣، يمكن أن تفيد في معرفة مكان منزل ما في الحي الذي يحوي على شوارع متقاطعة. يستطيع صاحب المنزل إرشاد زائريه إلى منزله بأن يقول إنه يعيش عند تقاطع الشارع الثالث والجادة الثانية ، فلا يدع مجالاً للالتباس أو الخطأ.

في عام ١٦٤٦ سافر إلى ستوكهولم لتدريب الأميرة كريستين، التي أرادت أن تكون الدروس في الخامسة صباحاً يومياً . وبالرغم من كراهيته لهذا التوقيت فلم يكن بإمكانه الرفض إكراماً للأميرة. نتيجة لذلك وعلى إثر الاستيقاظ المبكر توفي ديكارت في أحد أيام الشتاء من عام ١٦٥٦.

وسوف نتكلم عن ديكارت الفيلسوف في فصل قادم .

باسكال (١٦٢٣-١٦٦٢م) ❹ Pascal


باسكال

يشعر بعض المؤرخين أنه عندما يكون المرء عالماً فيتوجب عليه القيام بعمله على افتراض عدم وجود إله ! هذه الفرضية تقود إلى نتائج غريبة ومثيرة عندما يتعلق الأمر بشخصية دينية مثل شخصية باسكال الفيلسوف والرياضي والكاتب البارع. كان يوصف بالعبقري من جهة ويتهم بالمرض العقلي من جهة أخرى! لماذا يا ترى؟

باسكال قبل ١٦٥٤/١١/٢٧ : بدأ عمله في الهندسة وعمره ١٦ عاماً ومن أهم إنجازاته:

١- صنع أول حاسوب في العالم وعمره ١٨ عاماً ، ضمنه آلة باسكال المعروفة باسمه . وبعد عدة سنين صنع وباع ٥٠ جهازاً منها .

٢- في عمره العشرين درس الضغط الجوي وتوصل إلى بعض النتائج ، وإليه يعود تعريف واحدة الضغط المعروفة باسمه وهي:

$$1\ Pascal = 1\ Newton\ /m^2$$

وقال ، في هذا المجال ، إن وزن الأرض هو 8.2×10^{18} رطلاً.

٣- يعد من مؤسسي علم الاحتمالات ! فقد حل بعض المسائل المتعلقة برمي قطع النرد بناء على طلب بعض الأمراء المقامرين . وقد استخدم في سبيل ذلك أحياناً المثلث الشهير، المعروف اليوم بمثلث باسكال.

عرف هذا المثلث من قبل الصينيين والهنود والعرب (فقد عرف الكرخي مثلاً أن السطر n يستخدم لنشر المقدار $\left((a+b)^n\right)$. ولكن باسكال ، بالإضافة إلى ذلك ، برهن أن المدخل k في السطر n هو التوافيق التي يرمز لها بأحد الرموز:

$$C_k^n = C(n,k-1) = \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

وأن مجموع المداخل في السطر n هو 2^n .

<u>باسكال بعد 1654/١١/٢٧</u> : في هذا اليوم تخلت خيول باسكال عن أعنتها وكادت العربة أن تسقط في الهاوية ! فقد أتاه الوحي الإلهي أن الحقيقة والمتعة والسلام هي عند إله إبراهيم وإله إسحق ويعقوب وليس عند الأساتذة أو الفلاسفة . وقد أخذت دراساته الرياضية من ذلك الحين منحى روحانياً بحتاً .

في آخر عمل له وهو كتاب" أفكار" يدافع عن حقيقة العقيدة المسيحية وفيه يعرض برهاناً رياضياً يبين فيه أن الأكثر حكمة ، للإنسان، هو الأيمان بالله! أما خطوات برهانه فهي كما يلي: ليكن $\varepsilon > 0$ احتمال وجود الإله (قد يكون ε صغيراً جداً) . إذا لم يكن الإله موجوداً (الاحتمال $1-\varepsilon$) عندئذ وبالرغم من خيبة أملك ومن معاناتك من هزء الكافرين فإن خسارتك لن تكون هائلة ولنقل إنها لا تتجاوز ١ (واحدة السعادة) . وإذا كان الإله موجوداً وأنت تؤمن به فإنه سوف يسعدك جداً ويعطيك على الأقل $2/\varepsilon$ من السعادة. وبذلك يكون الأمل الرياضي :

$$\varepsilon \times 2/\varepsilon - 1 \times (1-\varepsilon) = 1+\varepsilon$$

من جهة أخرى إذا كان لا يوجد إله (الاحتمال $1-\varepsilon$) وأنت لا تعتقد بوجوده فإنك سوف تربح قليلاً ولكن ليس أكثر من ١ (وحدة سعادة) . وإذا وجد الإله ولم تختر الإيمان

به فإنك لن تحصل على أية مرابح (حسنات) مقابل عدم الإيمان به. بذلك يكون الأمل الرياضي لعدم الإيمان بالله:

$$(1-\varepsilon)\times 1+\varepsilon\times 0=1-\varepsilon$$

بما أن $1+\varepsilon > 1-\varepsilon$ فإن الحكمة تقتضي على الإنسان الحكيم الإيمان بوجود الإله .

تساؤلات

① لتكن $A(x,y)$ نقطة من القطع المكافئ $y=x^2/4p$. ماهي معادلة المستقيم المار من A بميل فيها قدره m ؟ بين ديكارت بأن m سيساوي $x/2p$ إذا كان المستقيم يلاقي القطع في نقطة واحدة فقط (أي عندما يكون مماساً). قم بنفس العمل.

② أوجد معادلة منحني ديكارت التي يكون من أجلها ضعف المسافة من أي نقطة (x,y) عن النقطة $(-1,0)$ مضافاً إليها المسافة من (x,y) إلى النقطة $(1,0)$ يساوي ٤ .

③ بين أن مجموع الأعداد في السطر النوني في مثلث باسكال هو 2^n .

④ بين أن الرقمين الواقعين على مسافة واحدة في السطر النوني من مثلث باسكال متساويان.

⑤عالج اليونانيون مسألة هندسية عبر عنها ديكارت بالعلاقة التالي:

$$y=\frac{x^3-2x^2-x+2}{x}$$

وقد كان لهذا التابع أهمية خاصة عند نيوتن .ارسم بيان هذا التابع .

⑥ عمل باسكال في تطوير علم الاحتمالات. وقد حل المسألة التالية (التي عرضها عليه أحد النبلاء المقامرين): كم مرة يجب أن نرمي قطعتي نرد حتى نحصل على الوجهين ٦ معاً باحتمال لا يقل عن النصف؟ حل هذه المسألة.

⑦برهن على صحة نظرية فيرما الصغيرة: إذا كان P عدداً أولياً و m عدداً طبيعياً كيفياً كان p أحد عوامل المقدار m^p-m

توجيه: استخدام الاستقراء الرياضي ثم العلاقة: $(m+1)^p=m^p+\ell p+1$

⑧ يلاحظ أن أفضل النتائج الرياضية قام بها أشخاص غير رياضيين . علل صحة هذه المقولة أو نقيضها بحسب رأيك.

⑨ يعود لباسكال القول: إن للقلب تفكيراً لا يفهمه العقل أبداً ! هل ترى أن لمثل هذا القول علاقة بقضاء باسكال وقتاً في الفلسفة والصلاة أكثر منه في الرياضيات؟

⑩هل تعتقد أن شك ديكارت المستمر ساعد في تطور الرياضيات في عصره؟ علل ما تقول!

XVII الفصل السابع عشر

بدايات علم النهايات

نيوتن (١٦٤٢-١٧٢٧) ❶ Newton



نيوتن

ولد اسحق نيوتن في عيد الميلاد وبعد ٣ أشهر مات أبوه وتركته أمه بعد ٣ سنوات. في عام ١٦٦١ ذهب إلى كامبردج حيث قابل إسحق بورو وعمل معه في بدايات التحليل . لقد كان بورو أول من وجد أن

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

وفي نفس الوقت ، ولكن بشكل مستقل عنهما ، عمل لايبنيتز أيضاَ في التحليل . أول ما أنجزه نيوتن هو تعميم نظرية ثنائي الحدين حيث قدم العلاقة:

$$(1+x)^n = 1 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k + ...$$

ووجد قيم الأمثال a_k .

ومن الملاحظ هنا أنه عندما تكون n عدداً طبيعياً نحصل على قانون الكرخي- نيوتن المعروف. عمل نيوتن أيضاً في الميكانيكا وله عدة قوانين شهيرة في الجاذبية (ومن منا لا يعرف قصة التفاحة ؟) . وهذا العمل بمجمله يمثل ما يعرف بنظام نيوتن في الحركة أو في الجاذبية ، المبني على استخدام المشتقات ، فقد استخدم المشتق كوصف دقيق للسرعة وخصوصاً السرعة اللحظية . لقد كان هذا العمل ثمرة جهود كبيرة قام بها هو ومن سبقوه

في علوم الرياضيات والفلك. وسوف نتكلم عن بعض إنجازاته الهامة ، في الميكانيك والفلك ، في الفصل التاسع عشر.

في عام ١٦٦٩ ترك بورو عمله في جامعة كامبردج ليخلفه نيوتن حيث عمل أستاذاً لمدة ثلاثين سنة. ولكن محاضراته على ما يبدو لم تجذب الطلاب أحياناً. في كتابه " رحلة مع العباقرة" كتب عنه ويليام دونهان: كانت محاضرة نيوتن تدوم لمدة نصف ساعة قبل أن تخلى القاعة. ولكن نيوتن لم يكن ليبقى أكثر من ربع ساعة بعد خروج آخر طالب منها.

لقد اعتقد نيوتن (وكان يقول ذلك) أنه كان يرى أبعد من الآخرين لأنه كان يقف أكتاف الجبابرة (ربما كان يقصد غاليليو وأرخميدس). وقد قال أيضاً : أبدو كأني طفل يلعب على شاطئ البحر ليلهي نفسه بإيجاد الحصى الناعمة أو صدفة لامعة بينما المحيط الكبير من الحقيقة غير مكتشف أمام ناظري.

لايبنيتز (١٦٤٦- ١٧١٦) ❷ Liebniz


لايبنيتز

ولد لايبنيتز في لايبزيغ بألمانيا . توفى أبوه عندما كان في السادسة من عمره. وقد تعلم بنفسه، مستفيداً من المكتبة التي تركها والده بعد وفاته. وقد دخل الجامعة وهو في سن الخامسة عشرة ، وتقدم للحصول على درجة الدكتوراه في القانون في عام ١٦٦٦ ولكنه رفض لصغر سنه . في نفس العام طرح مفهوم المنطق الرمزي الذي أصبح لغة عالمية يمكن من خلالها التعبير عن كل الأفكار الواقعية.

وقد عمل لايبنيتز كدبلوماسي! وفي هذا المجال سافر إلى باريس، في عام ١٦٧٢، ليقنع لويس الرابع عشر بمهاجمة مصر (بدلاً من مهاجمة بلدان أوروبية). وقد فشل في هذه

المهمة ، إلا أنه ربح التعرف على شخصيات معتبرة هناك مثل كريستيان هيوجين الذي قدمه إلى المؤسسة الرياضية والفيزيائية في باريس.

أول مسألة تحدي قدمها هيوجين إلى لايبنيتز هي إيجاد مجموع السلسلة :

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ \dots\ +\frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)}+\dots$$

فوضع لايبنيتز:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}\right)$$

ووجد أن مجموع السلسلة هو:

$$2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\dots\right)=2\,(1+0)=2$$

في أيامنا هذه ، ولحل هذه المسألة ، نفضل أولا إثبات أن السلسلة متقاربة (أي تسعى إلى نهاية محددة عندما تسعى n نحو اللانهاية) ثم نقوم بالتحويلات المناسبة.

اللامتناهي في الصغر ❸

أثناء عمله في تطوير التحليل الرياضي استخدم لايبنيتز، تقريباً، نفس الرموز التي نستخدمها حالياً . وهو لم يكن يعرف أن نيوتن فد سبقه باكتشاف جزء من هذا العمل وبشكل مستقل عنه. على كل حال هو أول من نشر نتائج هذا العمل ، رسمياً، في عام ١٦٨٤. ولذلك يأخذ بعض الرياضيين الانكليز (ولو ظلماً) على لايبنيتز أنه نشر بعض أعمال نيوتن باسمه وأعزاها لنفسه .

نظر لايبنيتز إلى dx و dy على أنهما كميتان لامتناهيتان في الصغر . نتيجة لذلك dx هو تزايد ل x وهو لامتناه في الصغر ومختلف عن الصفر و dy المعرف بالعلاقة:

$$dy = f(x+dx) - f(x)$$

أيضاً (عموماً) مختلف عن الصفر . فمثلاً: إذا كان $y = f(x) = x^2$ فإن

$$dy = (x+dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2$$

وهذا المقدار يمثل مقدار تغير التابع f المقابل لتحول dx ولذلك سيكون ميل ما عرف بالمماس لمنحني التابع في x هو نسبة تغير التابع على تغير المتحول:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx$$

ونتيجة لذلك وبتناهي x نحو الصفر سيكون ميل المماس $2x$.

إن مفهوم اللامتناهي في الصغر (الذي نجده أيضاً في عمل نيوتن) كان محط نقد الفيلسوف جورج بيركلي الذي تساءل إن كان باستطاعتنا التقسيم على dx إذا كان معدوما! (يساوي ٠)؟ وإذا لم يكن معدوماً فكيف نحصل على الميل بالشكل $2x$ وليس بالشكل $2x + dx$ ؟ وقد ظهر بالفعل أن هناك مشكلة إن كان dx معدوماً أو لم يكن!

لقد حلت هذه المشكلة فيما بعد من قبل الرياضيين كوشي ووايرشتراس حيث استطاعا وضع التحليل على قدم ثابتة وعلى أسس متينة لا يظهر فيها مثل هذا التناقض!

دي موافر (١٦٦٧-١٧٥٤) ❹ De Moivre

أول ما يشتهر به دي موافر هو القانون الشهير:

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$$

حيث i هي العدد العقدي المعروف بالواحدة التخيلية $i = \sqrt{-1}$.

بالإضافة إلى ذلك تعود له الانجازات الآتية:

- هو أول من وجد الحد النوني في متتالية فيبوناسي.
- عمل في الاحتمالات وألف فيها كتاباً " أسس الحظ"
- وهو أول من اكتشف صيغة ستيرلينغ (وليس سترلينغ نفسه) وهي:



دي موافر

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$$

لدينا مثلاً بحسب هذا القانون القيمة التقريبية: $10! \approx 3598695$ والقيمة الحقيقية هي $10! = 3628800$.

لقد أجحف المجتمع بحق موافر بالرغم من كتاباته الكثيرة ودعمه من قبل نيوتن . فهو لم يعط أي عمل رسمي في الرياضيات. لقد كان مصدر دخله من التعليم ومن الإجابة على أسئلة المقامرين. يقال إنه ، في أواخر، أيامه كان ينام ٥ دقائق يومياً فقط . وفي أحد الأيام الذي نام فيه ٢٤ ساعة تبين أنه فارق الحياة.

❺ Euler **أولر** (١٧٠٧-١٧٨٣م)

كان عمل أولر (الذي عاش في النمسا) غزيراً ولا يقل عن ٧٥ مؤلفاً منها: مقالات في بناء السفن ودفاع علماني عن الأصل الرباني للإنجيل ومؤلفات في الرياضيات، نذكر بعض نتائجها:



أولر

- إذا كان لدينا كثير وجوه محدب له M رأس و L حرف و N وجه فإن : $M + N - L = 2$
- أول من أعطى العلاقة $e^{\pi i} = -1$.

● برهن على صحة العلاقة:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ \dots\ \frac{1}{n^2}+\dots=\frac{\pi^2}{6}$$

● يعد أولر مؤسس الفرع المعروف بحساب التحولات . ولا يزال لهذا الفرع أهمية خاصة ، حتى اليوم، في البحث في دراسة المسائل القصوى ، وفي كونه أساساً لظهور الفرع الهام المعروف بنظرية القيم المثلى (أو الأمثليات Optimization) .

في كتابه ، حول حياة أولر، وصف نيكولا كوندرسيت (Nicolas Condorsets) وفاة أولر بهذه السطور: تعشى مع السيد ليكسل وعائلته وتحدث عن كوكب هرشل وحساب تحديد مساره . وبعد قليل نادى حفيده ليلعب معه ولكنه قطع اللعب ، وهو يشرب الشاي ، عندما سقط الغليون من يده فتوقف عن الحساب وعن التنفس.

لاغرانج (١٧٣٦-١٨١٣) ❻

ولد في إيطاليا وبعد أن ترك والده العائلة من خلال الخصام، قال لاغرانج: لولا هذا الحظ التعيس لما اهتممت بالرياضيات! عمل لفترة في برلين ثم سافر إلى باريس حيث أصبح مقرباً من ماري أنطوانيت أول اندلاع الثورة.



لاغرانج

في عام ١٧٩٠ تعرض من جديد للإحباط والوحدة وكاد أن يترك الرياضيات لولا حبه للفتاة الصغيرة رينيه ليمونيير التي أنقذته بزواجها منه ، ودام هذا الزواج عشرين عاماً، مليئة بالحب ومليئة بالإنتاج الرياضي . من بعض إنجازاته:

- تفسير لماذا يظهر القمر دائماً نفس الوجه إلى الأرض .
- أول من برهن على نظرية ويلسون (١٧٧١) القائلة: إذا كان p عدداً أولياً فإن p يقسم $(p-1)!+1$ وبالعكس!.
- أول من أثبت النظرية: إذا كان m عدداً طبيعياً كان للمعادلة الآتية حل طبيعي :

$$x^2 - my^2 = 1$$

- ولا ننسى أخيراً نظرية لاغرانج الشهيرة ، في القيمة المتوسطة (وهي تعميم لنظرية رول) وكذلك نظرية مضاريب لاغرانج والتي لا تزال تعميماتها تظهر حتى يومنا هذا.

لابلاس (١٧٤٩-١٨٣٣ م) ❼ Pierre Simon Laplace



لابلاس

ولد لابلاس من والدين فقيرين ولكن الحياة ابتسمت له فانتهى مركيزاً في ظل عودة البوربون إلى الحكم . سأله نابليون مرة: كتبت كتاباً عن الكون دون ذكر الخالق! فأجاب لم أحتج إلى هذه الفرضية (وكان الكتاب في الميكانيك) . كانت حجته بالرغم من الاضطرابات التجاذبية في الكون فإن النظام الشمسي مستقر وهو لا يحتاج إلى ترميمات طارئة من قبل الإله عز وعلى.

كانت أفكاره في الميكانيك أقرب إلى المادية (القدرية) بمعنى أن أي فكرة أو خيار يمكن التنبؤ بها من خلال عقل ماهر. فإذا بدأ هذا العقل بوصف دقيق لمجريات الكون في لحظة ما من الماضي البعيد فإنه وبالاعتماد على قوانين الفيزياء يستطيع التنبؤ بمجريات المستقبل! يستطيع مثلاً معرفة مكان وجود خلايا جسد لابلاس في أول أيلول عام ٢٠٢٥

ب م. ولكننا نعرف الآن أن هذه الفكرة لا تتفق وقوانين الفيزياء التي تدخل فيها قوانين النسبية والارتياب.

من أكبر خدماته للرياضيات هي استخدامه عبارة: من السهل أن نرى! وعندها كان الإنسان يحتاج ساعات لكي يرى!

تساؤلات



① بين أن القيمة المطلقة لأمثال منشور ثنائي الحدين $(1+x)^{-3}$ هي أعداد مثلثية.

② لتكن التوافيق $C(m,n)$ أمثال الحد x^n في منشور ثنائي الحدين $(1+x)^m$ حيث m عدد طبيعي ما. برهن أن:

$$(m+1,n+1)=(m,n+1)-(m+1,n)$$

④ برهن على صحة قانون المشتق لجداء تابعين.

⑤ برهن (بعد لايبنيتز) أن المشتق النوني للجداء $f\,g$ هو :

$$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)f^{(k)}g^{(n-k)}$$

⑥ برهن على صحة قانون موافر من أجل أي عدد طبيعي .

⑦ اعتمد على قانون موافر لإيجاد الجذر الثالث للعدد $1+\sqrt{-2}$

⑧ تحقق من صحة نظرية ويلسون عندما $p=7$

⑨ وُجد الكثير من الرياضيين الكنسيين والكثير من الرياضيين غير الكنسيين في القرن السابع عشر. كيف تقارن بين مستوى العمل الرياضي بين هذي الصنفين من الرياضيين؟

⑩ قال لايبنيتز: إن الأعداد التخيلية تمثل منتصف الطريق بين الوجود واللاوجود! ماذا قصد بذلك؟

الرياضيات الحديثة

الجبر والتحليل ❶

في القرن التاسع عشر حصل منعطف كبير في الرياضيات بحيث أصبحت الدقة متوخاة. وتم تطهير المفاهيم والأفكار الرياضية من الشوائب إن كان في الجبر أو في التحليل أو في نظرية الأعداد.

①**الجبر:** في القرن التاسع عشر بلغ الجبر طبيعته التجريدية التي هي عليه اليوم. وكان مفتاح الحدث في التطوير من خلال خاصتي التجميع والتبديل، التي كان يعتقد أنها حاصل تحصيل (أي محققة سلفاً)، كما كان الحال بالنسبة للمسلمة الخامسة قبل لوباتشيفسكي. وقد قام بهذه الأعمال هاملتون مستخدماً لأول مرة الأعداد العقدية كأزواج مرتبة.

② **التحليل**: فيما مضى كان الرياضيون غير حريصين على الدقة حيث كانت تظهر نواقص في البرهان الدقيق (وخصوصاً في بداية ظهور علم النهايات) وكان يعتمد على الأسلوب الحسي الذي يصعب أحياناً عرضه . فقد كانت الكلمات مثل صغير ، اللانهاية ، تتناهي ، نهاية ، ... الخ ، غير معرفة بدقة. حتى وضع العالمان كوشي ووايشتراس أخيراً الأسس الصلبة للتحليل الرياضي . وكان هذا هو النموذج المتوخى للدقة في القرن التاسع عشر.

لقد كان وايرشتراس (**١٨١٥**-١٨٩٧) أول من أعطى مثاله الشهير في عام ١٨٦١ عن التابع المستمر الذي لا يقبل الاشتقاق في أي نقطة بعد أن كان ذلك يبدو مستحيلاً .

③ **نظرية الأعداد**: تطورت نظرية الأعداد بطريقة منظمة ومستمرة منذ أيام اليونان .

وقد عمل ، منذ القدم ، الكثيرون بهذا الموضوع بدءاً من فيثاغورث مروراً بإقليدس وديوفانتوس إلى غاوس وكوشي وغيرهم . ولكن القفزة الكبيرة في هذه النظرية هي الاعتراف أخيراً بوجود اللانهاية ، الذي أسس له كانتور، في أواخر القرن التاسع عشر.

غاوس (١٧٧٧-١٨٥٥م) ❷ Gauss

كان غاوس في الثامنة عشر من عمره عندما اكتشف طريقة لإنشاء كثير الأضلاع المنتظم ذي ١٧ ضلعاً باستخدام المسطرة والفرجار فقط. وبفرحته بحل هذه المسألة ، التي نغصت حياة بعض الإغريق لمدة طويلة ، تقرر مصيره بأن ينذر نفسه للرياضيات بعد أن كان جل اهتمامه منصباً على الفلسفة . يعد غاوس من أعظم الرياضيين قاطبة بعد نيوتن وأرخميدس. فقد أبدع في مجالات مختلفة ، من الرياضيات ، مثل الهندسة ونظرية الأعداد، وله إنجازات عظيمة في مجالات أخرى مثل الفيزياء والميكانيك. بناء على ذلك ليس عبثاً أن يسمى أمير الرياضيات . وكان هو نفسه قد قال: الرياضيات ملكة العلوم والحساب ملك الرياضيات.



غاوس

في عام ١٦٤١ وضع فيرما الفرضية التالية:

فرضية: كل عدد طبيعي يقبل أن يكون مجموعاً لثلاثة أعداد مثلثة ومجموعاً لأربعة أعداد مربعة ومجموعاً لخمسة أعداد مخمسة ... وهكذا . وإذا كان n عددا صحيحاً و k عدداً طبيعياً غير سالب ، فإن العدد ذا التصنيف $n+2$ (مثلثة أو مربعة ...) له الشكل:

$$n\ \frac{k^2-k}{2}+k$$

فمثلاً الأعداد المثلثة الأولى (ذات التصنيف ٣) هي:.... $0, 1, 3, 6, 10, 15$,

والأعداد المربعة الأولى (ذات التصنيف ٤) هي: $0, 1, 4, 9, 16, 25$, ...

والأعداد المخمسة الأولى (ذات التصنيف ٥) هي: $0, 5, 12, 22$, ...

ما فرضه فيرما هو أن كل عدد طبيعي يقبل أن يكون مجموعاً لِ $n+2$ من الأعداد ذات التصنيف ($n+2$) .فمثلاً :

$$19 = 1+3+15 = 1+1+1+16 = 0+1+1+5+12$$

أحد إنجازات القرن التاسع عشر في نظرية الأعداد هو البرهان على هذه الفرضية. فقد برهن على صحتها في البداية لاغرانج من أجل $n = 2$ ولكن البرهان الأول عليها من جميع الأعداد المثلثة يعود إلى غاوس. وبالاعتماد على نتيجة غاوس برهنها كوشي في جميع الحالات.

كوشي (١٧٨٩-١٨٥٧م) ❸ Augustin Cauchy



كوشي

ولد اوغستين كوشي في باريس في عام الثورة الفرنسية ولكنه بقي داعماً للملكية (فقد كان مثالياً وشاعراً – يقال إنه تزوج من الأميرة لويزا بور- Aloise Bure وكتب الشعر الرومانسي لها) ولم يهتم بالقواعد الفرنسية الجديدة ، فخسر نتيجة ذلك عدة وظائف له. فمثلاً في الفترة مابين ١٨٠٣ و ١٨١٩ أعطي كرسي الرياضيات

لجولييمو ليبري Guliemo Libre (بالرغم من أن كوشي كان أفضل منه) لأنه هاجم اليسوعيين وكوشي دافع عنهم . ومع ذلك فقد هرب ليبري من فرنسا بعد أن فضح أمره بسرقة الكتب من المكتبة.

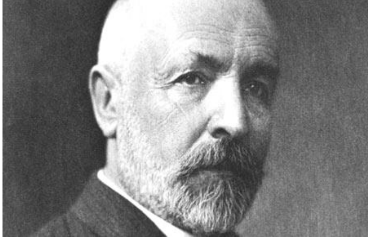
ونظراً لمثاليته ودقته فقد عانى من عدم محبة الطلاب له ، حيث كان يعني هذا لهم دراسة وتعب أكثر. كما كان قلقاً لهبوط اعتباره بعدما تكررت ظاهرة نجاح طالب واحد أو طالبين فقط من ثلاثين من طلابه .

من إنجازات كوشي:

- التعريف الدقيق الأول لمفهوم النهاية الاستمرار ونظرية القيمة الوسطى المعروفة.
- اختبار كوشي للتقارب .
- نظرية كوشي التكاملية ... وغيرها

كانتور (١٨٤٥- ١٩١٨) ❹ Cantor

اقتنع الفلاسفة التجريبيون أمثال هوبس ولوك وبعض الرياضيين (من بينهم غاوس) بعدم وجود اللانهاية في الرياضيات. بفضل كانتور يقبل ، اليوم، جميع الرياضيين (تقريباً) بوجود اللانهاية. فقد استطاع أن يبني نظرية واضحة ومتكاملة عن اللانهاية تجيب على جميع الاعتراضات التي وضعها الفلاسفة المناهضون لفكرة اللانهاية وأصبحت أساساً للرياضيات المعاصرة.



كانتور

ولكن وبسبب موقفه هذا من اللانهاية ، ورفض معظم الناس في أيامه لفكرة اللانهاية ، فقد لاقى اضطهاداً من الآخرين (مثل كرونيكر L. Kronecker) بحيث لم يحصل أبداً على منصب في الجامعة . نتيجة لذلك وفي عام ١٨٨٤ وقع في نوبة نفسية ولم يتعاف منها (بشكل تام) أبداً ومات في المصح النفسي في هالي بألمانيا.

ولكن التاريخ حكم لكانتور بأنه من أعظم الرياضيين وأهمهم . فهو آمن بالإله غير المنتهي وكذلك بمجموعات الأعداد غير المنتهية . وكان يعتقد (على غرار مبدأ أوغوستين) أن الله خلق كل ما يمكن أن يكون حياً ونافعاً . وقد قاده إيمانه هذا إلى السير في الاتجاه الصحيح.

① **لانهاية اللانهايات** إحدى نتائج كانتور المفاجئة هي لانهاية السلم الهرمي للانهايات المتمايزة ! كل لانهاية أكبر من تلك التي تحتها.

لاحظ مفكروا القرون الوسطى أن عدد النقاط في دائرة كبيرة هي نفسها في دائرة صغيرة مشتركة معها في المركز. بمعنى أن أي نصف قطر للكبرى يقطع الصغرى في نقطة واحدة بالضبط. هذه الملاحظة قادت بولزانو (Bolzano ١٨٤٨-١٧٨١)، وغيره ، للاعتقاد بأن أي مجموعتين غير منتهيتين متطابقتان لوجود تقابل (١ إلى ١) بينهما. في هذا الصدد بين كانتور في عام ١٨٧٣ أن ذلك غير صحيح ! وذلك بأن أعطى مثالاً بين فيه أن المجموعة غير المنتهية قد لا تتطابق مع مجموعة مجموعاتها الجزئية.

② **فرضية المستمر.** سأل كانتور السؤال التالي:

لتكن مجموعة الأعداد الطبيعية N ولتكن $P(N)$ مجموعة مجموعاتها الجزئية. نعلم أن $N < P(N)$. هل توجد M بحيث يكون:

$$N < M < P(N)$$

لقد افترض كانتور أن الجواب هو بالنفي! وعلى إثر ذلك عرفت هذه المسألة بفرضية المستمر . وقد تبين فيما بعد أن فرضية المستمر أو نقيضها لا ينتج من مسلمات نظرية الأعداد . ولم يستطع أحد بناء قاعدة مسلماتية أخرى تعطي جواباً مقنعاً لهذه الفرضية. والأهم من ذلك فقد تبين أن فرضية المستمر تقابل مسلمة إقليدس الخامسة في التوازي بالنسبة لنظرية الأعداد

تساؤلات



① كيف نعبر عن العدد ٤٢ كمجموع لأعداد مثلثة بأربع طرق مختلفة.

② أوجد الأعداد المسدسة الستة الأولى.

③ بين أن جميع الأعداد المسدسة الستة الأولى هي أعداد مثلثة.

④ أي الأعداد الأولية بين ٢٠ و٣٠ تقبل أن تكون مجموعاً لعددين مربعين (أوجد العددين في كل حالة).

⑤ برهن على صحة النتيجة الآتية (التي تعود إلى كوشي):
إذا كان $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ فإن تقارب السلسلة $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ يكافئ تقارب السلسلة:
$$a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4 + \ldots$$

⑥ برهن على وجود تقابل ١ – ١ بين مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة الأعداد الصحيحة.

⑦ برهن على وجود تقابل ١ – ١ بين مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة الثلاثيات من الأعداد الصحيحة.

⑧ قال برتراند رسل: إنه القرن التاسع عشر الذي اكتشف الطبيعة البحتة للرياضيات! كيف تعلق على ذلك؟

⑨ يقال عن القرن التاسع عشر إنه حمل الكثير من الانجازات في الجبر من قبل رياضيين يافعين ! هل ترى ذلك صحيحاً ولماذا؟

XIX الفصل التاسع عشر

الرياضيات وعلم الفلك

عودة بطليموس ❶

في حديثنا عن نظام بطليموس لفتنا النظر إلى أفكاره حول التصميم الرياضي للكون وعن مركزية الأرض في نظامه هذا. وبالرغم من أنه أدرك بأن دوران الأرض وكرويتها يثبتان بعض الظواهر التي نراها، ولكنه أصر على أن الأرض لا تتحرك . وهكذا وبعد ما يقارب ١٣٠٠ عام تعود أفكار بطليموس للظهور، ولكن بحلة جديدة تم فيها القبول بمركزية الشمس في النظام الكوكبي الجديد. وقد تم قبول هذه النظرية بالرغم من أنها تناقض أبسط إحساساتنا. فهل للرياضيات علاقة بقبول مثل هذا التغيير الجذري في إدراكنا لهذا العالم الفيزيائي؟

تدور الأرض في نظرية مركزية الشمس حول محورها ، وتدور دورة واحدة كل ٢٤ ساعة من مقياسنا الزمني . يعني هذا أن الشخص الواقف على خط الاستواء يتحرك بسرعة ٢٥٠٠٠ ميل في اليوم أو ١٠٠٠ ميل في الساعة. ونستطيع الحكم على كمية هذه السرعة الهائلة من تجربتنا مع سرعة سيارة تسير بمعدل ١٠٠ ميل في الساعة. وكذلك الأرض تدور حول الشمس بمعدل ١٨ ميل في الثانية (أو ٦٤٨٠٠ ميل في الساعة) وبالرغم من هذه السرعة الهائلة فنحن فوق سطح الأرض لا نستطيع التحسس لا بالحركة الدائرية ولا الدورانية. ولا نقذف إلى خارج الفضاء كما هو متوقع من تجاربنا اليومية.

لكننا اليوم نقتنع بنظرية مركزية الشمس كحقيقة بالرغم من أن نظرية مركزية الأرض لا زالت متداولة في لغتنا اليومية، ولا زلنا نقول بأن الشمس تشرق من الشرق وتغرب من الغرب ، وبحسب ذلك تكون الشمس هي التي تدور وليس الأرض . لقد حدثت ثورة في علم الفلك ، وكانت الرياضيات العامل المؤثر في هذه الثورة .فلقد رأينا أن الأوروبيين تعلموا ، من أعمال الإغريق ، النظر إلى التصميم الرياضي للطبيعة ، وأن مثل هذا الاعتقاد أصبح قوياً من خلال المذهب الكاثوليكي ، الذي ساد في العصور الوسطى، التي اعتقد فيها بأن الله خلق العالم وأن الرياضيات كانت أساس هذا الخلق.

لقد استعادت النهضة الإيطالية أعمال الإغريق من مصادر مختلفة وخصوصاً العربية منها. وكان الفضل للكبير للرحالة ، ومنهم من التجار المغامرين، في نقل هذه المعلومات. لقد طمحوا بإحياء الثقافة وحلموا بجو رفيع من مستوى المعيشة. ولكن بدلاً من الاستمرار بالعيش والازدهار على أرض ساكنة ، وجدوا أنفسهم معلقين على أرض تتحرك بحركة دورانية وتدور حول الشمس بسرعة لا يمكن إدراكها. لقد أسس لهذه الثورة ولكل هذا الانقلاب في المفاهيم العالم كوبرنيك ومن بعده كبلر وغاليليو.

كوبرنيك (١٤٧٣-١٥٤٣م) ❷ Copernicus

ولد كوبرنيك في بولندا سنة ١٤٧٣ م وبعد دراسته للعلوم والرياضيات في جامعة كراكو قرر الذهاب إلى بولونيا (إيطاليا) حيث كان العلم أكثر انتشاراً، وهناك اهتم اهتماماً بالغاً بعلم الفلك .



كوبرنيك

وخلال فترة الثلاثين سنة ، المتبقية من حياته ، قضى معظم وقته في برج الكنيسة الصغير يراقب النجوم بالعين المجردة ويقوم بقياساته بواسطة أجهزة مصنوعة يدوياً لدراسة حركة الكواكب ، وما تبقى من وقته فقد كان يقضيه في تطوير نظريته الجديدة حول حركة الأجسام السماوية . وليس بعيداً عن الوقت الذي درس فيه كوبرنيك مسألة حركة الكواكب استطاع العرب بجهودهم المتواصلة تطوير نظرية بطليموس ، من خلال إضافة دوائر جديدة لحركة الكواكب ، وأصبحت نظريتهم تحتاج إلى ٧٧ دائرة كي تستطيع وصف حركة الشمس والقمر والكواكب الخمسة المعروفة . لكن نظرية العرب هذه كانت معقدة لبعض علماء الفلك ومنهم كوبرنيك. فالانسجام يتطلب نظرية أبسط من تعقيدات نظرية بطليموس.

إن جوهر ما توصل إليه تفكير كوبرنيك هو استخدامه للمسارات التدويرية في وصف حركة الكواكب . لكن الاختلاف الأكثر أهمية في تصوره هو وقوع الشمس في مركز أي مجموعة شمسية بينما تصبح الأرض كوكباً ، يدور حول الشمس، ويدور حول محوره، وبذلك توصل إلى تبسيط ملحوظ . وقد أصبح بمقدوره تقليل عدد الدوائر المطلوبة من ٧٧ إلى ٣٤ دائرة ، لكي يصف الحركة الكاملة للكواكب. وبهذا تكون نظرية مركزية الشمس قد قدمت تبسيطاً ملحوظاً في وصف حركة الكواكب وحسابات نظرية الفلك . لقد وجد كوبرنيك تبسيطاً رياضياً دله على أن الطبيعة مسرورة ببساطتها ، كما كان هو نفسه فخوراً لأنه فكر بأشياء اعتبرها آخرون ، ومن ضمنهم أرخميدس، أشياء منافية للعقل.

لكن المبادئ الدينية ومبادئ ما وراء الطبيعة تأثرت بالتغير الذي طرحته النظرية تأثراً كبيراً وأساسياً مما حذا بالكنيسة الكاثوليكية لإدانة النظرية الجديدة باعتبارها مذهباً فيثاغورثياً يناقض الروح المقدسة.

وقد كان رد فعل كوبرنيك ،على من اتهموه ، هو أنه هم من شوه الكتاب المقدس، بإهمالهم الكلي للرياضيات، من خلال حكمهم على أسئلة رياضية لا يجيدونها ،وذلك خدمة لأغراضهم. كما أضاف كوبرنيك بأن الكتاب المقدس يعلمنا كيف نستطيع الذهاب إلى الجنة، ولكنه لا يعلمنا كيف تتحرك الأجسام السماوية .

كبلر (١٥٧١ – ١٦٣٠) ❸Kepler



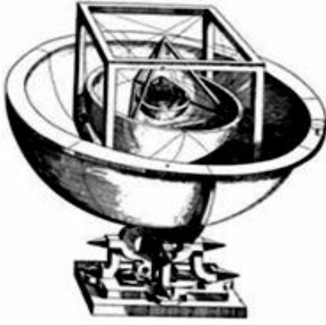
كبلر

بالرغم من أن نظرية السماء الثابتة تبسط نظرية الفلك والحسابات الفلكية إلا أن المسار التدويرى لم يتوافق بصورة تامة مع الملاحظات. لقد تم التطور الملحوظ في هذه المسألة ، بعد خمسين عاماً ، على يد متصوف شاذ وإنسان ذي عقل رياضي بارع، وتجريبي بنفس الوقت، هو جوان كبلر الذي تميز بالجمع بين القدرة التصويرية الكبيرة والحيوية مع الصبر الطويل في الحصول على النتائج . لقد عاش كبلر في ألمانيا وهو على النقيض من حياة كوبرنيك ، الآمنة والمرفهة ، كانت حياته سيئة ، فقد ولد في عام ١٥٧١ بصحة متواضعة وأهمل من قبل والديه وحصل على تربية غير جيدة . ولكنه، ومثل جميع الأطفال في حينه ، فقد أبدى رغبة في التعلم . وقد قبل في عام ١٥٨٩ في جامعة توبنجن الألمانية، وفيها تعلم الفلك على يد شخص متحمس لأفكار كوبرنيك فغدا مندهشاً من النظرية الجديدة .

لقد عارض كبلر التضييق الذي تمارسه الكنيسة ، الأمر الذي جعله يفقد وظيفته في الوزارة ليقبل عملاً آخر، كأستاذ للرياضيات في جامعة غراز في النمسا ، وهناك استطاع

كبلر تقديم تقويم جديد كهدية للبابا كريغوري الثالث عشر. لكن البروتستانت رفضوها لأنهم يفضلون بقاءهم متغيرين مع الشمس بدلاً من ارتباطهم بالبابا. وبعد ذلك بقليل، ونتيجة لهذا الموقف، اضطر كبلر لترك جامعة غراز ومدينة ستاريا بعد أن أصبحت حياته في خطر هناك.

في عام ١٦٠٠ استطاع الحصول على منصب رياضي تجريبي للإمبراطور رودولف الثاني، إمبراطور بوهيميا حيث قام بأهم أعماله . لقد هز شعوره نظام كوبرنيك لما فيه من جمال وعلاقات منسجمة فقرر البحث عن علاقات هندسية جديدة توصله إلى علاقات رياضية تجمع كل ظواهر الطبيعة.



نموذج كبلر للكون

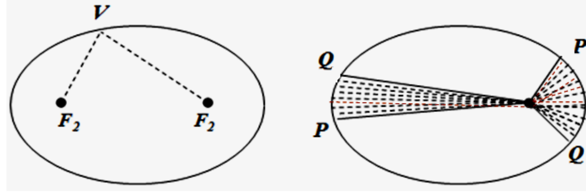
ولكن تماديه في الإعجاب ، بهذا الانسجام ، جعله يعتقد (حاول البرهان على ذلك) أن الله ، في خلقه لهذا العالم ووضعه لقوانين هذا الكون ، قد أخذ بالحسبان المجسمات المنتظمة الخمسة المعروفة منذ أيام الإغريق. وقد كان اعتقاده هذا نابعاً من حقيقة أن الكواكب المعروفة حينئذ كانت خمسة فقط ، فارتبط كل كوكب بالنسبة له بإحدى تلك المجسمات المنتظمة (استخدم كبلر الشكل المرافق لتوضيح الكيفية التي يتمثل فيها الكون من خلال المجسمات المنتظمة الخمسة). وبهذا كان عمل كبلر عرضة للانتقادات كتلك التي كان أرسطو يستخدمها في هجومه على الفيثاغورثيين .

بالرغم من ذلك فإن لكبلر المقدرة على الاستمرار مع النظريات التي تعطي نتائج لا توافق الملاحظات وبذلك لا يمكن الحصول على تنبؤات صحيحة. غير أنه توج عمله في

وضع ثلاثة قوانين مشهورة تطابق النتائج الجديدة ، ملخصا الأول والثاني منها هما:

القانون١: جميع الكواكب السيارة تدور حول الشمس في مدارات على هيئة القطع الناقص وتمثل الشمس إحدى محرقيه (ولا يتضمن المحرق الثاني معنى فيزيائياً).

القانون ٢: الخط الواصل بين كل من مركزي الكوكب والشمس يمسح ، أثناء دورانه حولها ، قطاعات مساحاتها متساوية في أزمنة متساوية (شكل٣٤).



شكل٣٤

أما اكتشافه للقانون الثالث فقد جاء بعد دراسة كبيرة حول التوافق ما بين الرياضيات والعلاقات الموسيقية ، حيث اعتقد أن الطبيعة ليست مصممة تصميماً رياضياً فقط ، بل منسجماً، أيضاً، واعتقد نتيجة لذلك بوجود نغمات موسيقية من الأشكال الكروية التي ينتج عنها هذا التأثير التوافقي.

إن نظرية مركزية الشمس وقوانين كبلر مقبولة لدينا اليوم وإن كنا لا نستطيع الوقوف على عظمة ما توصل إليه كل من كوبرنيك وكبلر . علينا أن نتذكر أن كلاً منهما عمل في ظروف صعبة، نتيجة للأفكار السائدة منذ عهد بطليموس وحتى القرن السابع عشر. فالأرض كانت مركز العالم والبشرية هي الصفة المركزية لهذا العالم ولقد خلق الله الشمس والقمر خصيصاً لنا ، وعلى هذا الأساس رفضت نظرية مركزية الشمس. هذه

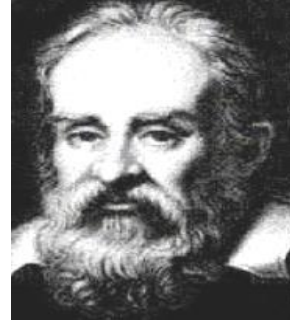
النظرية اعتبرت البشرية عبارة عن حفنة من الرمل على سطح إحدى الكواكب الكثيرة . كما رفضت النظرية الجديدة لعلم الفلك الجنة والنار بعد أن كانت تمثل مواقع جغرافية معقولة من وجهة نظرية مركزية الأرض.

لقد كانت هناك اعتراضات كثيرة على النظام الجديد ، ومنها ما كان معقولاً، وربما كانت مادة الاعتراضات الرئيسية هي أن الأرض ، التي تتحرك حركة دائرية ودورانية ، لاتطابق النظرية الفيزيائية للحركة بمفهوم أرسطو والتي كانت مقبولة في وقت كوبرنيك وكبلر.وهنا تظهر الحاجة لظهور نظريات حركية جديدة تجيب على مثل هذه الاعترضات.

غاليليو (١٥٦٤-١٦٤٢) ❹ Galileo

غاليليو

لقد وجدت نظرية مركزية الشمس مدافعاً قديراً لها هو غاليليو غاليلي . ولد غاليليو في فلورنسة ودخل جامعة بيزا وعمره ١٧ سنة ، لدراسة الطب ، ولكن اطلاعه على أعمال أرخميدس وأقليدس وسعت مواهبه في الرياضيات والعلوم.



في صيف ١٦٠٩ لفت نظر غاليليو أن الأجسام البعيدة كانت تبدو وكأنها قريبة ، ولذلك قام ببناء تلسكوبه الخاص وطور عدساته تدريجياً حتى حصل على تكبير يعادل ٣٢ مرة. وفي محاضرة إلى مجلس الشيوخ الفينيسي أوضح غاليليو بأن قوة تلسكوبية يمكن أن تكشف مواقع البواخر الحربية قبل ساعتين من وصولها . لكن خطة غاليليو كانت أبعد من ذلك فقد وضع خططه العلمية في استخدام أجهزته وتوجيه تلسكوبه نحو القمر ليرى

غاليليو ❹

جسماً ضخماً يحتوي على أراض جبلية ، وبذلك سقطت فكرة الوجه القمري المسطح مما زاد من تأييد نظرية مركزية الشمس . إلا أن هيئة محكمة التحقيق الرومانية اعتبرت هذا المبدأ معاد، ومنعت المطبوعات التي تؤيد أفكاره ومنها كتاب غاليليو حول الموضوع. ونتيجة لرغبته في إرضاء الكنيسة اعتبر نظرية مركزية الشمس مجرد وهم من الخيال بالرغم من اعتقاده بنقيض ذلك.

غير أن هناك إنجازات لغاليليو لا تقل أهمية عن انجازاته في علم الفلك فقد حاول دراسة الظواهر من خلال وصفها بواسطة نماذج رياضية وفق ما يعرف بمنهج غاليليو. فقد شعر غاليليو ، وكذلك أتباعه، بإمكانية أيجاد القوانين لهذا العالم الفيزيائيي التي تشابه في حقيقتها بديهيات إقليدس ، وربما يمكن توضيح منهج غاليليو من خلال المثال الآتي:

عندما تسقط كرة من يد شخص يمكن طرح الكثير من التساؤلات حول ظاهرة سقوط الكرة!! إن المسافة التي تقطعها الكرة تزداد مع الزمن ، وبلغة الرياضيات تسمى المسافة المقطوعة بالتابع والزمن المستغرق بالمتحول لأن كلاً منهما يتغير أثناء سقوط الكرة . ومن خلال البحث والتقصي تبين له أن المقاومة الثابتة للهواء تسبب فقداناً ثابتاً للسرعة، وأن إهمال المقاومة يعطي تسارعاً ثابتاً للحركة مقداره ٣٢ قدم/ثا ، ثم توصل إلى العلاقة:

$$v = 32\,t$$

التي تمثل علاقة السرعة v بالزمن t ، وكذلك علاقة المسافة مع الزمن الآتية:

$$d = 16\, t^2$$

حيث d المسافة المقطوعة بالأقدام و t الزمن بالثانية .

ومن العلاقة الأخيرة استنتج علاقة الزمن:

$$t = \sqrt{d/16}$$

التي عنت له استقلالية الزمن عن الكتلة. وهذا هو الدرس الذي تعلمه عند إسقاطه لأجسام

مختلفة من برج بيزا. ورغم ذلك يجد بعض الناس صعوبة في الاعتقاد بأن قطعة من الرصاص وريشة تستغرقان نفس الفترة الزمنية إذا سقطتا من ارتفاع واحد في الفراغ . ولكن هناك أمراً مهماً يجب طرحه هنا هو أن العلاقة السابقة تصف ظاهرة السقوط ولكنها لا تخبر لماذا تسقط الكرة؟ لقد كان ذلك إحدى التساؤلات التي شغلت فكر غاليليو وحاول معرفتها من خلال البحث عن العلاقات الرياضية التي تشرح صفات الطبيعة. وقد يبدو لأول وهلة أن مثل هذه الأفكار تظهر عدم وجود قيمة حقيقية في مثل هذه العلاقات الرياضية كونها لا تتضمن شرحاً وافياً ، لكن هذه العلاقات برهنت على أنها أثمن ما يملكه الإنسان من علوم حول الطبيعة.

ميكانيك نيوتن ❺

في سنة ١٦٤٢ ، وهي السنة التي توفى فيها غاليليو، وفي قرية إنكليزية ولدت امرأة طفلاً بجسم ضعيف ووزن خفيف هو إسحاق نيوتن. وبالرغم من ذلك فقد عاش لمدة ٨٥ عاماً مليئة بالشهرة كأي رجل عظيم في التاريخ. وهو باستخدامه منهج غاليليو حل محله وتجاوزه بسرعة حتى قال ألفريد وايتهود في هذا الصدد: غاليليو يمثل الهجمة ونيوتن الانتصار!

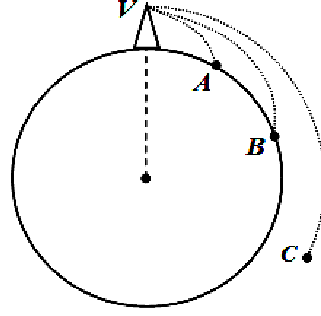
وقد قال عن نفسه مرة: لا أعرف أنا كيف أبدو بالنسبة للعالم لكن لنفسي فأنا كطفل يلعب على ساحل البحر أعبث بنفسي لهواً فأجد بلورة صخرية ملساء أو قوقعة ذات جمال غير طبيعي، بينما المحيط العظيم من الحقيقة يقف أمامي دون اكتشاف.

إن فلسفة نيوتن وأعماله مهمة جداً بالنسبة لموضع الرياضيات وتاريخها. لقد طرحت فلسفته البرنامج العام، الذي بدأه غاليليو،حيث قال في كتابة الشهير "المبادئ": أنا أثق في

الرياضيات حيثما ترتبط بالعلم وبذلك يكون عرضي لهذا العمل كمبادئ رياضية في الفلسفة ، لأن الفلسفة موجودة فيه من ظواهر الحركات لاكتشاف القوى في الطبيعة إلى الظواهر الأخرى المكتشفة من هذه القوى.

وفي هذه المهمة ، من وصف الطبيعة ، كان مبدأ نيوتن الشهير في توحيد السموات والأرض بقانون واحد . فقد كان العلماء في زمن نيوتن واثقين من أن كلاً من الشمس والأرض لها صفة جذب الأجسام نحوها . لذلك كانت فكرة توحيد التأثيرين بقانون رياضي واحد متطورة حتى في زمن ديكارت.

لقد بدأ نيوتن في التفكير في مسألة إرسال القذائف بصورة أفقية من قمة جبل عالية V. وكانت فكرته الأولى بأنه إذا أطلقت القذيفة بسرعة كافية فسوف تسحب نحو الأرض وفق منحن معين (على الشكل VA) ، وإذا أطلقت بسرعة كبيرة فسيكون سقوطها نحو الأرض وفق مسار مثل VB أبعد من المسار الأول، وإذا أطلقت بسرعة عظيمة كافية فيمكن للقذيفة أن تسير حول الأرض بصورة مستمرة (VC) وربما إلى مالا نهاية .



مسار القذيفة

من هذا المنطلق أمكن لنيوتن تفسير الحركة الدورانية للقمر حول الشمس. فإذا كانت الأرض وبواسطة قوى الجاذبية تتسبب في دوران القمر حول الأرض فتستطيع الشمس أيضاً وبواسطة جذبها للكواكب أن تجعل هذه الكواكب تدور حول الشمس.

وقد قادت حسابات معقدة نيوتن إلى الاعتقاد بأن قوة جذب أحد الأجسام على جسم آخر تتعلق بمربع المسافة بين مركزي الجسمين ، حيث تتناقص هذه القوة بازدياد المسافة بين

الجسمين وتزداد بازدياد كتلتيهما. وقد بينت الدراسات حقيقة أن العلاقة لقوة التجاذب F بين جسمين A و B كتلتاهما m_A و m_B والمسافة بين مركزيهما r ، تعطى بالمعادلة:

$$F = k\frac{m_A \cdot m_B}{r^2}, \quad k = const \qquad (*)$$

حيث k ثابت التناسب المشترك لجميع الأجسام.

ولتنظيم ما قام به نيوتن لحركات الأجسام الأرضية والسماوية فقد وضع في كتابه "المبادئ" ما يعرف اليوم بقوانين نيوتن في الحركة وملخصها:

أ- يبقى الجسم في حالة السكون أو الحركة بسرعة ثابتة إلا إذا أثرت عليه قوة خارجية.

ب- مقدار القوى المؤثرة ، على جسم ما ، هي حاصل جداء كتلة الجسم m في

تسارعه a ، ويعبر عن ذلك بالعلاقة $F = m a$ (التسارع هو الزيادة أو النقصان في سرعة الجسم والتغير في الاتجاه) .

ت- إذا أثر جسم بقوة ، على جسم آخر، فإن الجسم الآخر يؤثر على الأول بقوة مساوية لها في المقدار ومعاكسة في الاتجاه .

ولهذه القوانين الثلاثة أضاف نيوتن قانون الجذب العام (*) الذي استطاع البرهان عليه رياضياً . وبذلك يكون قد توصل إلى دليل هام على أن كل الأجسام في الكون تجذب بعضها بعضاً وبنفس العلاقة القانونية.

سر الجاذبية ❻

تمثل نجاح نيوتن الباهر، وبعد جهد معتبر ، في إثبات أن قوانين كبلر الثلاثة يمكن استنتاجها من القانونين الرئيسيين في الحركة وقانون الجاذبية. ويمكن لمن يود أن يبحث

عن تفسير قوة الرياضيات أن يرى أن القيمة الأساسية لقوانين نيوتن ، تكمن في إمكانية تطبيقها على حالات مختلفة في الأرض والسماء ، وبذلك فإن معرفة العلاقات الرياضية تمثل معرفة لجميع الحالات الموصوفة بهذه العلاقات. لقد كانت أعمال نبوتن وغاليليو بمثابة البداية في برنامج العلم.

ولقد تدرج نيوتن كصخرة تتدحرج من على سطح مدرج لتأمين قوانين رياضية واستخراج مضامينها . ولقد أمكن بطريقة مماثلة ، لما ذكر سابقاً ، حساب كتلة الشمس وكتلة أي كوكب آخر . ومن المعرفة بشكل الكواكب أمكن حساب الفترات الزمنية التي تدور بها الكواكب، كما عرف بأن المد والجزر سببه في التجاذب بين الشمس والأرض وأشياء أخرى كثيرة.

إن أعمال غاليليو ونيوتن ، ومن جاء بعدهما، تؤكد على كيفية حصولنا على المعرفة عن عالمنا الخارجي التي لم تأت عن طريق الإدراكات الحسية بل بواسطة الرياضيات. وقد كان جوهر كل هذه الأعمال رياضياً ، وأساسه قانون نيوتن في الجاذبية.

وبالرغم من هذه الإنجازات إلا أن كل محاولات فهم التأثير الفيزيائي لقوى الجاذبية قد فشلت ! فكل واحد منا يعرف أن سبب حركة الكواكب نسبة لبعضها هو الجاذبية . لكن نحن هنا لا نستفسر عن الاسم بل عن جوهر الشيء ، وليس عما نفهمه بل عن المبادئ الأساسية التي تحرك الحجر نحو الأسفل وليس نحو الأعلى أو ما الذي يحرك القمر من حولنا؟ لا شيء سوى الاسم الذي أعطيناه لكل حركات الأجسام الساقطة وهو الجاذبية. لقد واجهت نيوتن نفسه مسألة توضيح الجاذبية حيث قال: لقد أوضحت حتى الآن أسباب ظواهر السموات والبحار بواسطة قوة الجاذبية، غير إنني لم أستطع استنتاج أسباب صفات الجاذبية من خلال هذه الظواهر . لكن يكفي أن تكون الجاذبية موجودة وهي تتصرف تبعاً للقوانين التي وضعناها وهي كافية لحركة الأجسام السماوية وكذلك البحار.

مشكلات تحتاج لحل ❼

في نهاية القرن التاسع عشر كان علماء الفيزياء الرياضية سعداء يملؤهم الغرور بما توصلوا إليه من انجازات. ولكن سعادتهم لم تدم طويلاً ، وكان هو الهدوء الذي يسبق العاصفة. فلم يكن فهم جوهر الجاذبية هو المشكلة الوحيدة التي واجهها هؤلاء العلماء! أولى تلك المشاكل كانت مسألة ماهي الطبيعة الهندسية للفضاء الفيزيائي ؟ ومن المدهش أن يكون فهم هذه المسألة مرتبطاً بفهم الحقيقة الفيزيائية لمسلمة التوازي في الهندسة الإقليدية وطبيعة هذه المسلمة، فقد كان القبول بهذه المسلمة يعني القبول بالفضاء المطلق (الذي يعرف رياضياً بفضاء إقليدس) وكان رفضها يعني القبول بهندسات أخرى غير إقليدية، وبالتالي بفضاءات أخرى خيالية بالنسبة لمعرفتنا ، كالفضاء المنحني مثلاً ، تعتمد

على بديل هذه المسلمة (كما فعل لوباتشيفسكي وريمان) . ولاعجب إذاً أن يطلق الرياضي الكبير دالمبير على هذه المسلمة لقب " شماعة عناصر الهندسة". إن الحقيقة المهمة حول الهندسات غير الإقليدية هي إمكانية استخدامها لشرح الفضاء الفيزيائي بدقة (كما يحصل في الهندسة الاقليدية) بعد أن عجزت عن ذلك الهندسة الاقليدية نفسها.

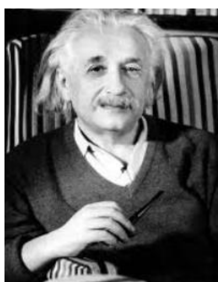
لقد اعتقد بعض العلماء ومنهم كليفورد (Clifford) أن بعض الظواهر الفيزيائية ناتجة عن انحناء الفضاء وأن هذا الانحناء لا يتغير من مكان إلى مكان فحسب بل من زمن إلى زمن أيضاً، وهذا التغير ناتج عن الحركة في المادة. لقد افترض كليفورد أيضاً احتمالية أن يكون تأثير الجاذبية ناتجاً عن انحناء الفضاء لكن بعض قياساته المتواضعة في حينه لم تؤكد على صحة افتراضه هذا وكان على هذه الفكرة الرائعة أن تنتظر قدوم آينشتاين.

هناك مسألة أخرى محيرة طرحها مبدأ الجاذبية. فالجسم الفيزيائي يمتلك صفتين متميزتين هما الكتلة والوزن! فالكتلة هي مقاومة الجسم التي يبديها ضد ما يغير من سرعته أو اتجاه حركته أما الوزن فهو قوة جذب الأرض للأجسام . وفي نظرية نيوتن فإن كتلة الجسم ثابتة لكن وزن الجسم يعتمد على بعده عن الأرض. وبالرغم من استطاعتنا التمييز بين

صفتي المادة: الكتلة والوزن إلا أن النسبة بينهما ثابتة في نفس المكان ، ولكن هذه المعلومة ليست جوهرية ، فهي تشبه إلى حد ما قولنا إن نسبة إنتاج الوقود إلى إنتاج القمح ثابتة كل سنة، فهل يمكن إيجاد مثل هذه العلاقة بين إنتاج الوقود وإنتاج القمح؟ هذه النسبة بين الوزن والكتلة بقيت مبهمة حتى أيام آينشتاين. والمشكلة الأخيرة التي واجهت العلماء هي اعتقاد نيوتن بالزمان والمكان المطلقين وعرفهما في كتابه: " فالمكان المطلق، في طبيعته، وبدون الرجوع إلى مصدر خارجي يبقى متشابهاً وبدون حركة . أما الزمان الحقيقي والمطلق في طبيعته فهو عبارة عن جريان منتظم بدون الرجوع إلى مصدر خارجي" . إن هذه المبادئ تعد مادية بطبيعتها وهي جزء من التجارب البشرية كما أن الصيغة الصحيحة لهذه القوانين وضعها الله في حساباته. وبذلك نرى أن أفكار نيوتن العلمية بما فيها المكان والزمان المطلقين مبنية على افتراضات ميتافيزيائية بما فيها الله.

لقد قام نيوتن بالتوصل إلى تحويلات معينة عند دراسة الحركة بالنسبة لجملتي إحداثيات ثابتة . وتوصل في هذا المجال ماكسويل ، ومن بعده لورنتز، عند تطبيق ميكانيك نيوتن في الكهرومغناطيسية ، إلى تحويلات عرفت باسميهما (تحويلات ماكسويل ، تحويلات لورنتز) وتوصلا إلى علاقات مثيرة بين المسافة والسرعة والزمن ولكن الحيرة بقيت قائمة ولم تتضح الصورة إلا بعد سنة ١٩٠٥ ،عام ظهور نظرية النسبية.

نسبية آينشتاين 8



آينشتاين

في عام ١٩٠٥ دخل ألبرت أينشتاين (Albert Einstein 1879-1955) على العصر من أوسع أبوابه . لقد كان آخر مفكري القرن التاسع عشر العظماء الذين اعتبروا الرياضيات مساعداً للتفكير واعتمد في نظريته النسبية كلياً على الرياضيات. وبعد دراسته للميكانيك الكلاسيكي

(أي ميكانيك نيوتن) والنظرية الكهرومغناطيسية، وبعد التفكير في المسائل المطروحة سابقا، نشر نتائجه في عام ١٩٠٥ بما يعرف الآن بنظرية النسبية الخاصة.

لقد اعتقد بإمكانية توسيع حدود قوانين نيوتن التي تعتمد على المحاور المستمرة لوصف الفضاء والزمان المطلقين. إن حقيقة ظهور سرعة الضوء متساوية لجميع المراقبين أثارت انتباهه وأصبحت إحدى فرضيات نظريته في النسبية الخاصة. وقد تبين له أن المراقبين الذين يتحركان بسرعة نسبية، إلى بعضهما، لا يتفقان على المسافات فحسب، بل أنهما لا يتفقان في قياس الفترات أيضاً. ونتيجة أخرى من فرضيات النسبية الخاصة، المتعلقة بجمع السرعات، توصل إليها كما يلي:

لنفرض أن رجلاً يجدف في مياه ساكنة بسرعة ٤ ميل في الساعة، فإذا كانت سرعة تيار الماء ميلين في الساعة فهل أن محصلة السرعة الناتجة ٦ أميال في الساعة؟ هذا غير صحيح من وجهة نظر النسبية (ويحدث ذلك خصوصاً بالنسبة للسرعات الكبيرة) لأنه تبين أن محصلة السرعة v تعطى بالعلاقة العامة

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_2 / c}$$

حيث v_2 هي سرعة الرجل و v_1 سرعة التيار أما $\boldsymbol{c}$ فهي سرعة الضوء .

إن أغرب ما جاءت به نظرية النسبية الخاصة هو أن كتلة الجسم تتزايد مع سرعته . لقد طرح آينشتاين هذه الفكرة في أحد بحوثه سنة ١٩٠٥ كما يلي: إذا اعتبرنا m_0 هي الكتلة ، في حالة الاستقرار بالنسبة إلى مراقب ما ، فالعلاقة الرياضية للكتلة m ، المتحركة بسرعة مقدارها v ، ستكون:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

علماً أن $\boldsymbol{c}$ هي سرعة الضوء (لاحظ أنه عندما تكون v قريبة من سرعة الضوء ستكون الكتلة m قريبة من اللانهاية) . كيف يحدث هذا ؟ بالتأكيد إنه عند زيادة سرعة كتلة ما

لا يعني أنه نحصل على جزيئات جديدة. إن الجواب على هذا السؤال يبدو غريباً، ولتقريب جيد نستطيع إثبات أن الزيادة في الكتلة تعادل تقريباً الطاقة الحركية للكتلة المستقرة بعد قسمتها على مربع سرعة الضوء. وبالفعل فقد جسد آينشتاتين ذلك ببراعة في القانون العظيم ، الذي ابتكره لتحديد العلاقة بين الكتلة m والطاقة E ، وهو:

$$E = m \times c^2$$

إن العلاقة السابقة بين الكتلة والطاقة تبدو عظيمة. فهي تعني أن الزيادة في الكتلة تعادل طاقة معينة. كما نستطيع القول هنا إن الكتلة المتحركة تتصرف بحيث أن كتلتها تزداد. لكن هذه الزيادة تعادل من الناحية الفيزيائية كمية من الطاقة. وقد اقترح آينشتاين أيضاً

بأن الزيادة بالكتلة يمكن إيجادها في الجسيمات المشعة (مثل الالكترونات) إذا كانت سرعتها كبيرة وتم إثبات ذلك عملياً . وفي حالة تسخيننا لكتلة معينة فإننا سنزودها بالطاقة وبهذا تزداد كتلتها. كما أن العكس صحيح أيضاَ! فبحالة نسبية يمكن تقليل سرعة الجسيمات في كمية ما من المادة لتفقد جزءاً من كتلتها وتولد مقابلها طاقة. سوء الحظ هنا يكمن في أن عملية الانشطار أو الاندماج للجسيمات الأولية تولد الإشعاعات وبهذا تكون لدينا الفكرة الإنسانية لتوليد الطاقة والفكرة اللاإنسانية لتوليد القنبلة الذرية.

غير أن نظرية النسبية الخاصة لم تقدم حلاً للمشاكل التي تكلمنا عليها في الفقرة السابقة، فلا يوجد تفسير لمبدأ جذب الأجسام باتجاه الأرض ، أو لماذا تكون نسبة الكتلة والوزن ثابتة في موضع معين. وقد حاول آينشتاين معالجة مثل هذه المسائل فيما بعد من خلال نظريته النسبية العامة. وبالفعل فقد وسع آينشتاين معادلاته توسيعاً جعلها تنطبق على أجسام تسير بسرعات متغيرة وعلى خطوط منحنية ، بحيث تشمل معادلات الحقل، الناتجة من نظرية النسبية ، كل الحركات الممكنة بالإضافة إلى وصف السلوك العام لعالمنا ولعوالم أخرى وجدت في الماضي أو ستوجد في المستقبل. إن مدى ما تستطيع هذه المعادلات أن تحققه ، وهي المعادلات المؤلفة من بضعة رموز صعبة ، تعادل مجموعة كاملة من كتب فلسفية تذهل العقل وتحير الخيال. وما كان لأينشتاين أن يحقق

روائعه هذه لولا وضعه مادة الكون المتحركة ضمن إطار رياضي ذي أبعاد أربعة هي أبعاد الفراغ الثلاثة المعروفة بالإضافة إلى الزمن. وقد أدخل فكرة الزمن لأنه وجد في نسبيته الخاصة أن الزمان والمكان لا يفترقان. إي أن حدوث حادثة معينة يتوقف على مكان حدوثها. ويبدو في استمرارية الزمن والمكان التي أوجدها آينشتاين أن المادة والجاذبية هما مظهران لشيء واحد ، الأمر الذي يوحي بأن المادة يمكن أن تعد خلاصة الجاذبية. وهذا أبسط ما يمكن أن نقوله في نظرية النسبية العامة.

لقد قدمنا مثالاً بسيطاً لما تتضمنه نظرية النسبية الخاصة ونحن لم نكن هنا بصدد دراسة هذه النظرية إلا من باب مقارنتها بما سبقها من إنجازات تراكمية، في الرياضيات والفيزياء، فقد مثلت بحق تتويجاً لهذه الانجازات.

ويبدو الآن واضحاً كم من العلم أصبح مصاغا بطريقة رياضية أو هندسية. فمنذ أيام إقليدس كان يبحث في قوانين الفضاء الفيزيائي ثم لخص هيباركوس وكوبرنيك ، وكذلك كبلر، حركات الكواكب بحدود هندسية . أما غاليلو ، ومن بعده نيوتن ، فقد وسعا من تطبيقات الهندسة إلى الفضاء اللانهائي وإلى الملايين من الكواكب. وعندما عرض لنا لوباتشيفسكي وريمان هندسة العالم الخارجي، وضع آينشتاين فكرته في المحاور الأربعة، بصورة رياضية، وبذلك أصبحت الجاذبية والزمن والمادة وكذلك الفضاء جزءاً من التركيب الهندسي للطبيعة. وقد غدا في الوقت نفسه اعتقاد اليونانيين بأن فهم الواقعية ناتج من فهم صفاتها الهندسية وكذلك فكرة ديكارت ،بأن ظواهر المادة والحركة يمكن تفسيرها بواسطة هندسة الفضاء،أصبحت ذات تأكيدات واسعة. إن أعمال كوبرنيك وكبلر وغاليليو وكذلك نيوتن أظهرت حقيقة الكثير من الأحلام ، فكان هناك الحلم والأمل لفلكيي العصور القديمة والوسطى لدراسة طرق الطبيعة. كما وجدت الخطة التي وضعها ديكارت للسيطرة على الطبيعة من أجل خدمة البشرية. فالبشرية تطورت نحو كلا الهدفين: العلمي

والتقني ، ولقد أكدت القوانين الكونية إمكانية اكتشاف ظواهر الطبيعة الغامضة .

ولقد استفاد الإنسان في يومنا هذا من نظرية نيوتن في معرفة كل شيء عن الأرض، وفي إرسال البشر إلى القمر وإرسال السفن الفضائية لتصوير الكواكب القريبة مثل المريخ وزحل ، من خلال وضع المخططات ذات الأساس الرياضي بصورة جيدة وبدقة تامة، وكل خطأ مرتكب يكون سببه الأخطاء البشرية الميكانيكية .

نحن نعيش الآن في عصر متطور على جميع المستويات بدءاً من علم الفضاء حيث تحمل المركبات الفضائية البشر إلى القمر والكواكب الأخرى وانتهاء بعلم الحواسيب ذات

المقدرة الهائلة في انجاز الحسابات والبرمجة. لكن أولئك الذين عاشوا في القرنين السابع عشر والثامن عشر وحتى الذين استوعبوا كتابات كوبرنيك وكبلر كانوا في شك من أمرهم ! يكفي الآن النظر إلى نتائج الملاحظات التي نظمها هيباركوس وبطليموس إلى أنه يمكن تنظيمها في نظرية مركزية الشمس لكوبرنيك وكبلر. ولذلك اعترفت وجهة النظر الحديثة بصحة كلتا النظريتين ولا حاجة لاختبار نظرية مركزية الشمس إلا لبساطتها الرياضية.

تساؤلات

① ماهي قوة التجاذب (الأرضي) بين شخصين يزن كل منهما ٤٠ كغ يبتعدان عن بعضهما بمقدار $\sqrt{g}\ 10^7$. (الجواب: 16×10^{-11} **Neuton**).

② ماذا كان يقصد نيوتن عندما كان يقول إنه يرى أبعد من الآخرين لأنه كان يقف على أكتاف الجبابرة؟

③ كل من سقراط الحكيم وعيسى المسيح خسر حياته في سبيل افكاره، بينما تراجع غاليليو عن فكرته حول نظرية مركزية الشمس حفاظاً على حياته! هل كان غاليليو جباناً؟

④ في عام ١٩٤٩ اكتشف كورت غيدل (Kurt Godel) نموذجاً للكون تكون فيه معادلات أينشتاين، في الجاذبية، صحيحة وحيث يمكن نظرياً السفر فيه إلى الوراء عبر الزمن. وقد تمت محاولات كثيرة رياضية وفلسفية لدحض نموذج غيدل ولكنها فشلت جميعها! كيف تعلق على ذلك؟

XX الفصل العشرون

الرياضيات والفلسفة

❶ مسألة الوجود

هل يوجد عالم فيزيائي مستقل عن الإنسان؟ هل توجد جبال ووديان وأشجار وبراري وبحار وسموات بوجود الإنسان أو بدونه؟ بالرغم من أن هذه الأسئلة تبدو ساذجة ،حيث تزودنا حواسنا بالأدلة على وجود مثل هذا العالم، إلا أن المفكرين والفلاسفة ما انفكوا عن طرح مثل هذه الأسئلة عبر العصور.

فقد رأينا أن فيثاغورث ربط وجود العالم بالأعداد، وأول فيلسوف يوناني اهتم بجدية بهذا الموضوع هو هيراقليط (٥٠٠ ق م)، فقد أقر بوجود عالم خارجي مع افتراض أن كل شيء في الكون متغير بانتظام، وله تعود المقولة الشهيرة: "لا يمكن للشخص أن يخطو مرتين في نفس النهر" . وعلى نقيضه قال أبيقور (٣٤١ – ٢٧٠ ق م): إن حواسنا هي المرجع الذي لا يخطئ في معرفة الحقيقة ، وكذلك إن الأجسام تتكون من الذرات الصغيرة التي لا تفنى ولا يمكن تجزئتها أو تغييرها.

وقد ذكرنا سابقاً إن لأفلاطون فلسفته الشهيرة التي تفترض وجود العالم الحقيقي ، المتمثل بعالم الأفكار والمثل، وهذه الأفكار لا تدخل عقولنا عن طريق الحواس ولكنها تكمن فيه، كما أكد أن الرياضيات هي الحقيقة الأساسية في أصل الوجود، إلا أن النقص في فلسفة أفلاطون هو رفضه لأي براهين أو نتائج تعتمد على حجج فيزيائية أو فلكية. وقد أعاقت تصورات أفلاطون ، حول الأفكار المثالية ولقرون عديدة ، تقدم العلم التجريبي لأنها تصورات فلسفية لأفكار مثالية مجردة وبعيدة عن ملاحظة ما يجري في العالم الحقيقي من حوادث عفوية.

ولكن وبعد التطور الهائل في علم الميكانيك والفلك ، في عصر النهضة وما بعدها ، فقد أعيد طرح مسالة وجود العالم الحقيقي وبنيته ، من جديد وعلى أسس جديدة كما سنرى.

النموذج الرياضي للكون ❷

النموذج الرياضي للكون ❷

بالرغم من التأثير الكبير على مر العصور لفلاسفة الإغريق وبالرغم من أن حضارتهم تؤكد على الرياضيات إلا أنهم كانوا بعيدين عن عالم العلم ، وخصوصاً التجريبي منه، وبالتالي كانت فلسفتهم ناقصة. وفي زمن العصور الوسطى المظلمة، وبعد أن خبا ضوء الحضارة الإغريقية الباهر، لم يعد مهماً التفكير بوجود العالم الخارجي، حيث ظهرت في هذه الفترة النظرة اللاهوتية التي قللت من أهمية الحياة على الأرض وأكدت على التهيؤ لحياة أخرى في السموات . واستمر

الظلام في أوروبا حتى ظهور بوادر الفلسفة الحديثة ، في القرن السادس عشر، ومعها بدأ الاهتمام بالعلم وبالرياضيات.

في ذلك الحين كان للعرب إنجازات كبيرة في شتى العلوم ومنها الرياضيات. وقد نقلت هذه الإنجازات مترجمة إلى أوروبا. لقد أذهلت هذه الأفكار جميع الأوروبيين ، ولكن المشكلة التي عانوا منها في البداية هي تناقض المفاهيم الإغريقية مع الثقافة السائدة. ففي حين اعتقد الإغريق بالتصميم الرياضي للطبيعة فإن مفكري القرون الوسطى نسبوا مثل هذه الخطة إلى الخالق ! فكل ما يجري في الطبيعة هو من صنع الله والكون نفسه هو من صنع الله ومسير بإرادته.

فكيف إذن يمكن فهم عالم الله ليتطابق مع البحث عن الأنظمة الرياضية للطبيعة؟

لقد أتى الجواب من خلال ظهور مذهب جديد يقول بأن الله خلق هذا الكون بتصميم رياضي ! ولذلك فقد كانت أعمال علماء الرياضيات ، في القرون الأولى من عصر النهضة ، ذات طابع ديني وكان البحث عن القوانين الرياضية يظهر عظمة ما صنعه الله . ويمكن الذهاب إلى أبعد من ذلك ، بالتأكيد على أن علماء الراضيات متأكدون من وجود قوانين رياضية لمفاهيم الطبيعة ، لأنهم كانوا واثقين من جمعها مع بناء هذا العالم ، وكل اكتشاف لأحد قوانين الطبيعة إنما يؤكد على عظمة الخالق وليس على عظمة المكتشف.

غير أن النظرة بدأت بالتغير ، ولو ببطء ، في الفترات اللاحقة وخصوصاً بعد ظهور بعض الفلاسفة مثل ديكارت وهوبز ولوك ومن بعدهم كانت.

ديكارت الفيلسوف ❸

أول الفلاسفة الذين ظهروا في عصر النهضة كان ديكارت ، الذي يعد مؤسساً للفلسفة الحديثة، وجاءت مقالته بعنوان " التوجيه الصحيح للعقل والبحث عن الحقيقة من خلال العلم" لتعبر عن فلسفته. وللوصول إلى الحقيقة قال ديكارت بوجوب استخدام الطرق الرياضية، لأن مثل هذه الطرق تتفوق في جوهرها المادي، فهي الأداة القوية للمعرفة والتي تختلف عن الطرق التي ورثناها عن طريق الدوائر البشرية.

لقد كان لديكارت عالمان: الأول منهما هو ماكينة كبيرة من الرياضيات، موجودة في الفضاء، والآخر هو عالم التفكير العقلي. وإن تأثير عناصر العالم الأول، على العالم الثاني، ينتج عنه الكميات المادية غير الرياضية . إن العالم الحقيقي عبارة عن انسجام عظيم أو ماكينة مصممة تصميماً رياضياً. لقد وصف ديكارت السبب والنتيجة (وكيف يبدو تأثيرأحدهما على الآخر) وصفاً رياضياً والعلاقات المستخدمة كانت لنظريات تم استنتاجها من نظريات وبديهيات أخرى.وفي سبيل ذلك كان على ديكارت إيجاد حقائق بسيطة وواضحة تلعب دوراً في الفلسفة مشابهاً للدور التي تلعبه البديهيات في عالم الرياضيات، وقد توصل إلى نتائج رائعة من خلال بناء فلسفته على الموضوعات الآتية:

أ- أنا أفكر فأنا موجود .
ب- لكل ظاهرة سبب ، والنتيجة لا يمكن أن تكون أكبر من السبب .
ت- إن أفكار الكمال والفضاء والزمان وكذلك الحركة كلها فطرية في العقل .

لقد كان مرتاباً بجميع فرضياته باستثناء واحدة: أنا أفكر فأنا موجود ! ولأنه أدرك أنه محدود الفكر ، وغير كامل، فلا بد من وجود الأسمى والأكمل! ولهذا آمن بوجود الخالق. فقد كانت فكرة وجود الله أكثر أهمية له من الناحية العلمية من أهميتها من الناحية الدينية. إن معرفة العلوم الطبيعية يجب أن تصب في خدمة البشرية ، ولهؤلاء الذين أكدوا على أن الرياضيات توفر فرصة لاختبار ذكاء الشخص وقدرته على الإبداع ، رد ديكارت بالشكر لطريقة الجبر الجديدة (مشيراً إلى الهندسة التحليلية) حيث أصبحت الرياضيات

علماً ميكانيكياً في متناول يد الجميع . وهو من خلال فرضياته وتفكيره العقلي استطاع رسم فرضيات الوجود والواقعية على أسس رياضية وفلسفية جعلتنا (من خلال الاختبار الدقيق لكل خطوة من خطواته الرياضية) نبحث عن الحقيقة في أنفسنا.

وقد أكد أتباع ديكارت على حقيقة التصميم الرياضي للطبيعة . كما أن كبلر اعتبر أن حقيقة العالم تكمن في العلاقات الرياضية . وغاليليو، بدوره، اعتقد بالتصميم الرياضي للطبيعة ! فقد رأى أن المبادئ الرياضية هي الألف باء التي كتب الله بها العالم وبدونها

يصبح من الصعب كتابة كلمة واحدة ، وإن ما يمكن معرفته عن الطبيعة مقتصر على ما يمكن صياغته بعلاقات رياضية. وكذلك اعتقد نيوتن أن الله خلق العالم وفقاً لمبادئ رياضية معينة. بذلك يمكن تلخيص ما اعتقده كل من هؤلاء العباقرة بما يلي: هناك تناسق متأصل في الطبيعة يعكس نفسه في عقولنا على شكل قوانين رياضية . هذا التناسق يسمح بالتنبؤ بالأحداث في الطبيعة من خلال الملاحظة والتحليل الرياضي.

ولكن ماذا عن رأي الفلاسفة غير الرياضيين في هذا الموضوع ؟ هذا ما سوف نتطرق إليه في الفقرات القادمة.

هوبز (١٥٨٨-١٦٧٩) ❹ Hobbes



هوبز

توماس هوبز هو فيلسوف إنكليزي عرف بفلسفته السياسية والاجتماعية المميزة التي لاتزال قيمتها صالحة حتى اليوم . وأكثر ماشغله فيها هي مسألة كيف يستطيع الناس التعايش مع بعضهم بسلام بعيداً عن الخطر والخوف في الأزمات الوطنية .

لقد كتب ، عام ، ١٦٥١في مقالته الشهيرة: الليفتان" الشيء الهائل"منطلقاً من المعرفة المتوفرة في الرياضيات والعلوم، قائلاً: في عالمنا الخارجي هناك مادة في حالة حركة

فقط وإن الأجسام الخارجية تولد انطباعات في أعضائنا الحسية فتحدث عملية ميكانيكية تولد الإدراك في عقولنا. كما كتب في كتابه "طبيعة البشر" : لا يوجد تصور في عقل الإنسان لم يمر أولاً على أعضاء الحس. فالعقل لا يولد وبداخله أفكار كامنة ، لكن الإنسان ينمي محتواه العقلي باكتساب معرفة جديدة عن طريق أعضاء الحس بمجرد اتصاله بعالم الأشياء الخارج عن العقل. فصورة المثلث مثلاً تولد فينا انطباعا عن جميع أنواع المثلثات ، وإن كل شيء يعطي فكرة أو صورة لما هو مادة ! وحتى العقل فهو

مادة. وتجنى المعرفة عندما تكتشف عقولنا التنظيم الفيزيائي للأشياء حيث أن الفعالية الرياضية هي التي تولد مثل هذا التناسق. فالفعالية الرياضية للمخ تنتج عنها معرفة حقة عن العالم الفيزيائي والمعرفة الرياضية هي المعرفة الصادقة وفي الواقع فالحقيقة تلج إلينا بصورة رياضية.

بهذه الكلمات يكون هوبز قد دافع عن الرياضيات وربطها بالوصول إلى الحقيقة أكثر من الرياضيين أنفسهم. لقد أذهل تحليل هوبز للعقل الكثير من الفلاسفة الذين رأوا في المخ أكثر من كتلة مادية تعمل ميكانيكياً.

لوك (١٦٣٢-١٧٠٤) ❺ Locke

في مقالته حول فهم البشرية بدأ جون لوك مثلما بدأ هوبز، وعلى النقيض من ديكارت، بافتراض عدم وجود أفكار كامنة في عقل الإنسان ! فالإنسان يولد بعقل فارغ، كأقراص فارغة ، تملأ تدريجياً بالمعلومات من خلال الحس ومن خلال التجربة . وذلك يولد الأفكار البسيطة . بعض هذه الأفكار سماها بسيطة مثل: الصلابة و التمدد والشكل، وأفكاراً أخرى سماها ثانوية مثل: صفات اللون والذوق والشم والصور ... ورأى أن


لوك

بركلي ❺

المعرفة تأتي من ربط مثل هذه الأفكار. كما رأى أن المعرفة الرياضية هي معرفة عامة وأكيدة وهي دقيقة وحقيقية. وهو فضل معرفة علوم الرياضيات لأنه شعر بأن الأفكار التي نتعامل معها أفكار واضحة يمكن الاعتماد عليها، كما أن الرياضيات تربط أفكاراً بعلاقات رياضية يمكن فهمها. لقد رفض لوك المعرفة الفيزيائية المباشرة، وافترض أن كثيراً من الحقائق حول تركيب المادة ما زالت غامضة ومثال على ذلك قوى الجذب

والتنافر بين الأجسام. وبهذه النظرة تكاد تكون نظرية لوك حول المعرفة الغامضة هي نفسها غامضة ولو لحد ما.

لقد وضع هوبس ولوك تصوراً مبدئياً عن وجود عالم مادي من خلال نظرياتهما حول المعرفة. وبالرغم من أن المعرفة تبدأ من هذا المصدر المادي لكن تبقى الحقيقة المؤكدة حول هذا العالم هي التي يمكن الوصول إليها عن طريق العقل وبواسطة الرياضيات.

بركلي (١٦٨٥-١٧٥٧) ❻ Berkeley



بيركلي

القسيس جورج بيركلي هو رجل الدين المشهور في تحليلاته المثالية حول طبيعة الوجود. فقد رأى أن المبدأ في الرياضيات والمادة فيها يمثل تهديداً مستمراً لمسائل كثيرة في الدين ولفكرة الخالق والروح. وهو يعد من الراديكاليين في رفضه لوجود عالم خارجي مستقل عن وعينا. وقد قدم انتقادات بارعة لمناهضيه بدءاً بهوبز ولوك ووضع تصوره الخاص حول نظرية الوجود.

فهو قد خالف كلاً من هوبز ولوك بمبدأ أن معرفتنا ناتجة عن تأثير أجسام مادية على عقولنا فهو لم يعتقد بوجود عالم مادي خارج عقولنا .

أما موقفه من الرياضيات فقد بني على تساؤلات أخرى! مثل ما هو سر قابلية العقل على

إدراك قوانين، لها المقدرة على وصف العالم الخارجي، ثم تنبؤها بماهية هذا العالم الخارجي؟ وكيف نستطيع مجابهة الاعتقاد السائد القوي الذي ساد القرن الثامن عشر بحقيقة عالم خارجي موصوف بعلاقات رياضية؟

من بين ما فعله ، في سبيل وضع حد لعلم الرياضيات، هو مجابهة الرياضيات بأضعف نقاطها! وهو المبدأ الرئيسي الجديد في حساب التفاضل ، المتمثل بالتغير اللحظي لتابع

معين، المقدم من قبل كل من نيوتن ولايبنيتز (الفصل XVII). وهذا النقد لم يكن ساذجاً كما يبدو لأول وهلة ! فكيف تكون نسبة مقدارين معدومين كمية محددة ؟ غير أن حساب التفاضل والتكامل كان قد أصبح مهماً وبالرغم من مهاجمة بيركلي له فقد نجح فيما بعد نجاحاً باهراً وخصوصاً بعد وضع الأسس المتينة ، من قبل كوشي ووايرشتراس، لهذا العلم. ولكن بيركلي حزم أمره بالنسبة لفلسفته حول الرياضيات معتبراً أن كل أنظمة السماء وما تحتويه لا تملك أي مادة دون العقل. فإذا كنت لا أستطيع إدراكها فهي إما أن تكون غير موجودة على الإطلاق أو أنها موجودة ببعض الأرواح الأبدية. وهكذا وبتجريد العالم المادي من ماديته اعتقد بركلي أنه تخلص نهائياً من وجود العالم الخارجي.

هيوم (١٧١١-١٧٧٩) ❼ Hume


هيوم

هز الفيلسوف دافيد هيوم العالم المسيحي وهو لا يزال في سن السادسة والعشرين. فقد تجاوز فلسفة بيركلي وأفكاره الراديكالية إلى حدود بعيدة. فبينما قبل بيركلي بفكرة عقل مدبر يتواجد فيه الإدراك الحسي والأفكار فإن هيوم رفض كلياً العقل!

فقد جاء في رسالته، حول طبيعة البشر، أنه يعتقد بأننا لا نعرف شيئاً عن المادة والعقل! فكلاهما خيال لا نستطيع إدراكه . وإن الأفكار والانطباعات التي ندركها كالصور كانت ❷

والاعتقادات ليست أكثر من تأثيرات ضعيفة لهذه الانطباعات. واستنتج من ذلك أن كل الناس وهذا العالم الخارجي المقترح عبارة عن إدراكات حسية لأي شخص ، وفي الحقيقة لا يمكن التأكد من وجودها . بذلك يكون هيوم قد قضى على العقل كما قضى بركلي على المادة! ولكن ماذا عن الرياضيات في فلسفة هيوم؟ لقد كانت الرياضيات عقبة لكل من حاول إنكار الوجود ، وهيوم نفسه لم يستطع إنكارها، ولكن حاول التقليل

من قيمتها الحقيقية. فبحسب رأيه أن النظريات الرياضية البحتة هي عبارة عن جمل غير مجدية وتكرار لحقيقة واضحة بطرق مختلفة! فمثلاً العمليات الحسابية من الشكل: ٢+٢=٢×٢=٤ هي تكرار للمعنى ٤ نفسه ولا يزيده وضوحاً .

بالإضافة إلى ذلك فقد شكك هيوم في قدرة العقل كأداة رئيسية في التحليلات الموضوعية. ولذلك لا نستطيع الحصول على المعرفة الحقيقية. فلا النظريات الرياضية ولا وجود الله ولا وجود عالم خارجي ولا الطبيعة ولا حتى المعجزة تحتوي على الحقيقة ، وبذلك يكون هيوم قد هدم ما بناه العقل من معرفة . هذه النتيجة وما فيها من حقد لأعظم صفة في البشرية كانت مؤثرة في نفوس كثير من مفكري القرن الثامن عشر وخصوصاً "كانت".

كانت (١٧٢٤-١٨٠٤)   ❽ Kant


كانت

رأينا أن هيوم قد أجهز على العقل والدين عن طريق تدمير النفس وتبديدها. ولم يكتف بذلك بل اقترح تدمير العلم بحل فكرة القانون. وانهار العقل كما انهارت المادة ولم يبق شيئاً . فروعت "كانت" هذه النتائج وأيقظته من ثباته العقائدي الذي سلم فيه بدون سؤال بضرورات الدين وأسس العلم. فقد هاله أن يستسلم الدين والعلم إلى

الشك وعمل جاهداً ، في السنوات التالية، من أجل إنقاذهما وتخليصهما مما ألم بهما. فأنتج فلسفة ، بلغت من السيادة والنفوذ ما لم تبلغه فلسفة أخرى على مر العصور، تضمنها كتابه الشهير " نقد العقل الخالص" .

لقد كانت هذه الفلسفة بالغة الصعوبة حتى لقد قيل فيه : لكي يكون المرء فيلسوفاً لابد من أن يدرس "كانت" أولاً ! ونحن لن نتطرق إلى فلسفة كانت إلا جزئياً ومن زاوية رياضية

فقط . لقد كتب "كانت" قائلاً: نستطيع القول بثقة إن بعض المعارف التركيبية البحتة كالرياضيات البحتة والفيزياء البحتة، هي حقائق موجودة لأنها تحتوي على فرضيات مطلقة الصحة ولا تعتمد على التجربة. لقد أكد "كانت" على أن كل بديهيات الرياضيات ونظرياتها هي حقائق، ولكن السؤال الذي طرحه هو لماذا نقبل بمثل هذه الحقائق؟ للإجابة على هذا السؤال علينا الإجابة على السؤال الأشمل: لماذا نجحت الرياضيات؟

لقد اعتبر "كانت" المعرفة الرياضية دليلاً للحقيقة ! فالبديهيات والنظريات الرياضية كانت بالنسبة له أحكاماً فطرية وتركيبية (لقد فرق كانت بين معرفتين: المعرفة التحليلية والمعرفة الفطرية (التركيبية)) ، ففكرة أن الخط المستقيم هو أقصر المسافات بين نقطتين هي عبارة تركيبية لأنها تتكون من فكرتين: الاستقامة وقصر المسافة ولا يعطي الواحد منهما دليلاً على الأخر . وقد ذهب كانت بعيداً عندما سأل لماذا يجب أن نقبل بمثل هذه الحقيقة : " إن الخط المستقيم هو أقصر المسافات بين نقطتين" وكيف يستطيع العقل معرفة مثل هذه الحقائق؟ لقد أجاب كانت على مثل هذه الأسئلة بأن عقولنا تمتلك ، بعيداً عن التجربة، أشكالاً مختلفة من الزمان والمكان سماهما الحدس. ولقد قال: " إن أفكارنا لا ترسم قوانينها من الطبيعة لكن تفرض مثل هذه القوانين على الطبيعة نفسها" . إن العقل وبصورة أوتوماتيكية يتقبل بعض الصفات الرئيسية عن المكان لأن مصدر حدس المكان موجود فيه ، فبعض المبادئ مثل الخط المستقيم هو أقصر المسافات بين نقطتين، وثلاث نقاط تكون سطحاً، وكذلك بديهية التوازي لإقليدس (التي سماها كانت حقيقة فطرية) كلها تشكل جزءاً رئيسياً من قنوات العقل. وبناء على ذلك فقد آمن بالهندسة الإقليدية وبوجود

فرضيات فطرية مركبة. ونحن لا نستنتج من ذلك أن قوانين الهندسة الإقليدية متأصلة في صلب هذا العالم، أو أن الله قد صمم هذا العالم على أساس هذه القوانين وإنما هي من صنع الإنسان الذي أوجدها لتنظيم إدراكه الحسي. ولتنظيم تجاربنا وترتيبها لابد من الاستعانة بالهندسة الإقليدية وميكانيك نيوتن. لقد كان شغف كانت بالهندسة الإقليدية يفوق

كلياً فلسفته الجريئة. وبالرغم من عدم خروج كانت لأكثر من ١٠ أميال خارج مدينته (كوينجزبيرغ) ، في شرق بروسيا ، إلا أنه استطاع اكتشاف هندسة هذا العالم . وبهذا نستطيع القول بأن كانت احتفظ للرياضيات بمكانتها، باعتبارها المنظم الرئيسي لقوانين العقل، وأن نظريته في المعرفة جعلت من الرياضيات العمود الفقري لفلسفته.

مدارس فلسفية ❾

في القرن العشرين ظهرت كمية هائلة من الأعمال والإنجازات في الرياضيات . وقد رافق ذلك تجريد للمفاهيم لم يسبق له مثيل. فلم يعد المستوي الإقليدي محور الحديث، بل تم تجاوزه إلى فضاءات أخرى، مثل الفضاءات الشعاعية والتوبولوجية كتجريد جديد له. وكانت هذه إحدى النقلات المهمة لإعادة الصبغة الفلسفية إلى معظم الرياضيات . فقد بين العاملون في أسس الرياضيات أن الأعداد الحقيقية تبنى على أساس الأعداد الكسرية، وأن الأعداد الكسرية تبنى على أساس الأعداد الطبيعية، وهذه بدورها تبنى على أساس المجموعات. ولكن السؤال: ما هي المجموعات ؟ هل هي هبة الله؟ أم هي من اختراع العقل الإنساني الذي أطلق العنان لأفكاره دون حدود؟

بحسب النظرة إلى هذه المسألة والجواب عليها ظهرت عدة مدارس فلسفية نذكر ثلاثاً منها:

① **المدرسة المثالية**(الأفلاطونية):يرى أصحاب هذه المدرسة(مثل كورت غيدل Godel ١٩٠٦-١٩٧٨) أن الأعداد كائنات مجردة ووجودها مستقل عن وعي الإنسان،وموضوعية وجودها نابع من أن إي فرضية لوصف هذه الأعداد ستكون صحيحة أو خاطئة .

من ضمن الاعتراضات الكثيرة على هذه الفلسفة نذكر ما يلي:

١- المثالية لا تبشر بالكثير قبل أن يكون للكائن المجرد تأثير ما على عقل الإنسان ، وكيف يحدث ذلك فهذا غير واضح.

٢- المثالية تفترض مسبقاً أنه باستطاعتنا تمييز الكائنات المجردة كالقطعة المستقيمة

أو العدد ٢ مثلاً ، وحقيقة ذلك غير واضحة أيضاً.

وعلى هذين الاعتراضين يمكن أن يجيب المثالي بما يلي:

١- إن حقيقة عدم فهمنا كيف تؤثر الكائنات الفيزيائية على وعينا لا تمنعنا من الاعتقاد بوجودها.

٢- إن حقيقة أن مفاهيمنا عن الكائنات الفيزيائية غير محددة لا يعني أننا لا نميز الكائنات الفيزيائية.

②**المدرسة الشكلية** (الصورية): يرى ممثلو هذه المدرسة ومنهم دافيد هلبرت (David Hilbert 1862–1943 م) أن الرياضيات ليست أكثر من لغة رياضية وهي تتمثل بمجموعة من الألعاب تستخدم فيها الرموز والإشارات. وليس لهذه الرموز من معنى خارج قواعد اللعبة. فالعدد ٢ مثلاً يمثل بأنواع مختلفة من الأشكال مثل II وss وغيرهما. من الاعتراضات المختلفة على هذه المدرسة نذكر ما يلي:

١- تعامل المدرسة الشكلية الكائنات، مثل الدائرة، كرموز أو إشارات محددة ، في حين أن الدائرة كائن فيزيائي لا ريب فيه.

٢- الشكلية لا تضمن أن اللعبة الرياضية بقوانينها الموضوعة متسقة.

على مثل هذه الاعتراضات يمكن أن ترد المدرسة الشكلية بما يلي:

١- الدائرة مثلها مثل بقية الأشياء هي كائنات مادية.

٢- بالرغم من أن بعض الألعاب الرياضية غير متسقة إلا أن الألعاب الأخرى ليست

كذلك. بالإضافة إلى أن عدم إتساق بعض الألعاب لا يمثل مشكلة كونه عائداً إلى الفرضيات الموضوعة.

③ **المدرسة الحدسية:** يرى ممثلو هذه المدرسة ومنهم الرياضي براور (L. Brouwer 1966 -1881) أن الرياضيات من اختراع عقل الإنسان وأن الأعداد مشابهة لحكاية الجنيات ، بأنها ليست أكثر من كائنات يتخيلها العقل وتختفي باختفائه . بالنسبة للحدسي فإن عقل الإنسان محدود ومتناه وكل سلم كانتور الهرمي للانهايات لا يعني له شيئاً. من المآخذ على هذه المدرسة:

١- الحدسي لا يأخذ بالحسبان أن الشعور بوجود الكائنات الرياضية غير مشكوك فيه.

٢- رفض اللانهاية يمثل إعاقة كبيرة للحدسيين وذلك لحرمانهم من جزء كبير من الرياضيات المعاصرة مثل التحليل الرياضي والتوبولجيا.

ويجيب الحدسيون على ذلك:

١- ليس هناك من معنى للعقل الإنساني أن يعي العالم عند عدم وجود عقل إنساني.

٢- من الأفضل أن نحصل على قليل من الرياضيات المبنية على أسس سليمة وواقعية من أن نعرف مقداراً كبيراً منها بدون معنى في معظمه.

تساؤلات



① لماذا كانت الفلسفة ضرورية لتفسير مفهوم العدد والمجموعة؟

② تعود المقولة الآتية إلى دافيد هيوم: يمكن القول إن الأخطاء في الفلسفة سخيفة فقط ، بينما الأخطاء في الدين قاتلة !! كيف تعلق على ذلك؟

③ من المقولات السلبية للمدرسة الحدسية هو رفضها لجزء كبير من الرياضيات وهي بذلك ترفض وجود الواقع خارج وعي الإنسان ! هل ترى في هذه النظرة ميلاً لتقديس الإنسان؟

④ في أي من الهندسات (الإقليدية وغير الإقليدية) تكمن الحقيقة؟ كيف سيكون جواب المدارس الفلسفية الثلاث السابقة عن هذا السؤال؟

④ قيل عن داروين أن الحياة العضوية تطورت تدريجياً من الخلية إلى الفيلسوف ، وهذا تقدم لا شك فيه . ولكن لسوء الحظ من يؤكد لنا هذا هو الفيلسوف وليس الخلية ! كم يؤثر ذلك على صحة النظرية ؟

XXI الفصل الواحد والعشرون

الرياضيات والفنون

ما هي الرياضيات ؟ ❶

بهذا العنوان بدأنا الفصل الأول وبه ننهي الفصل الأخير من هذا الكتاب.

لقد مثلت الرياضيات، خلال تاريخها الطويل ، جولة رائعة، في معركة فكرية ، لها قيمها وغاياتها ووسائل تعليمها ، وكان لها مؤيدوها كما كان لها معارضوها، فقد تميزت منذ القدم بأن لها أكثر من غيرها نصيباً من الكره وتجنباً من الكارهين، ينفر منها الناس وهم طلبة صغار ثم يشبون ويشب معهم هذا النفور حتى ليتندرون عليها وعلى محبيها، جادين مرة وهازلين مرة أخرى، متهمين مثلاً، أستاذ الرياضيات بشرود الذهن وغرابة الأطوار ، يبحث عن مظلته وهي في يده ، يدير وجهه للسبورة وظهره للتلاميذ ! يكتب آ ويقرأ ب ويعني ج وربما تكون الحقيقة د . مثل هذا الأمر أحدث أحياناً أثراً سيئاً في نفس شاب يسمعه وهو في سن المحاكاة والتفكير.

في أعقاب الحرب العالمية الأولى ظهر السؤال التالي: ما السبب التي تتعرض له الرياضيات من النفور؟ فارتفعت الأصابع كلها تشير إلى سبب واحد وهو أن أساليب التدريس عقيمة سواء في الصف الدراسي أو في كتاب التدريس . وفي إبان الحرب العالمية الثانية، وما بعدها ، برز السؤال عينه مرة أخرى ! وبرز الجواب نفسه أيضا. فقد كانت من العمليات المألوفة ، مثلاً ، إعطاء الطالب الصغير عددين من ١٢ منزلة للضرب أو كسوراً معقدة للاختزال فإن هو أخطأ كان جزاؤه الضرب.

لقد تبين أن الرياضيات ، في نظر من يفهمونها الفهم الصحيح، ليست مجرد عمليات، بل إن العمليات أقل ما فيها شأناً! ولو كانت الحسابات ذات شأن كبير لكان البقال أو التاجر من الرياضيين الجيدين. إن العمليات من الرياضيات هي فقط كمزج الألوان من اللوحة الفنية ، أو كرصف الكلام من الشعر الجميل ، أو كالهيكل العظمي من الحسناء ذات اللحم والدم والروح والنفس وجمال الخلق . فكما يشوه صورة الحسناء عرضها كهيكل عظمي فكذلك يشوه الرياضيات عرضها كمجموعة عمليات حسابية.

لنعود ونسأل : ما هي الرياضيات حقاً ؟ لقد أجاب الرياضيون عن هذا السؤال إجابات مختلفة تتفاوت طولاً وعمقاً وتتباين وضوحاً وغموضاً . فقد جاء في تعريف الرياضيات في الموسوعة البريطانية - القرن الثامن عشر- كما يلي: " الرياضيات هي ذلك العلم الذي يبحث في المقدار من حيث حسابه أو قياسه" .

ولكن هذا التعريف فقد صلاحيته منذ زمن بعيد وخصوصاً بعد ظهور فروع جديدة لم يعد المقدار هو الأساس فيها ، مثل الطوبولوجيا والهندسات غير الإقليدية المبنية على المسلمات. لذلك فقد ظهرت تعاريف أخرى من قبل كبار المفكرين مثل:

تعريف هلبرت: الرياضيات لعبة نلعبها وفق قواعد بسيطة، مستخدمين لذلك رموزاً ومصطلحات ليس لها بحد ذاتها أي أهمية (يذكر هذا التعريف بلعبة الشطرنج وقواعدها حيث ليس للقطع من قيمة لولا القوانين التي تحكم حركاتها).

تعريف برتراند رسل: هي الموضوع الذي لا نعرف فيه عما نتحدث ولا نعرف إذا كان ما نقوله صحيحاً (ولو أن هذا التعريف جاء من غير" رسل" لكان غريباً أو مستهجناً).

وقال الرياضي ويل: الرياضيات هي علم اللانهايات.

أما برأي طالب مجهول: فهي المادة التي غالباً ما نحصل فيها على علامة الصفر.

ولكن (وبعيداً عن رأي هذا الطالب) فلا بد من ظهور تعاريف أخرى للرياضيات متوافقة

مع التطورات المتلاحقة لهذه المادة. ولا بأس أن يكون أحد التعاريف مبنياً على فكرة النموذج الرياضي لما له من صلة وثيقة في التعبير عن الرياضيات كما سنرى في الفقرة القادمة.

نمذجة ظواهر الطبيعة ❷

تحدثنا أكثر من مرة في الفقرات السابقة ،وما قبلها، عن نظرة الكثير من الفلاسفة والرياضيين إلى الرياضيات كنموذج رياضي للتعبير عن العالم الذي نعيش فيه وعن الكون بمجمله.

ولكن وبعيداً عن العالم الأكبر، فإن النماذج (أو الموديلات) لعبت، وتلعب دوراً هاماً، في النشاط الإنساني. وقد قدمت هذه الموديلات ولفترة طويلة مساعدات كبيرة في دراسة التنوع الهائل للظواهر وبأنواعها المختلفة . والنموذج هو شكل مصغر لكائن ما يشبهه في المظهر أو يعبر عنه في الوظيفة . فالسيارة اللعبة هي نموذج للسيارة الحقيقية وبالون الطفل هو نموذج لكرة القدم أو للكرة الأرضية، والقارب هو نموذج للسفينة الكبيرة . وقد ساعد بناء نماذج للسفن في حل مشكلة التوازن والمناورة فوق الماء. بالإضافة إلى ذلك فإن معرفة موقع السفينة بالنسبة لخطوط الطول والعرض أو حل مسألة حركة قذيفة المدفع فوق السفينة، يتطلب إيجاد نموذج من نوع جديد مبني على أنظمة التحكم حيث ينعدم التشابه الهندسي تقريباً ويكون التشابه في الوظيفة التي يمثلها الموديل المختار . وهذا الفن من الموديلات يستخدمه الرياضيون والقادة والفلكيون وغيرهم . تعرف مثل هذه الموديلات بالنماذج الرياضية .

إنها الموديلات الفيزيائية المتمثلة بأجهزة وأدوات تتفاعل مع البيئة فتنتج عمليات مشابهة للسلوك الهادف للكائنات الحية. وإن العناصر الفعالة والهادفة لهذه الموديلات تقوم مقام الأعضاء في هذه الكائنات وهذه العناصر قد تكون ميكروفوناً أو مقياس ضغط أو راداراً

أو أية أجهزة أخرى... . ولكن يمكن القول إن حركة رادار أو عملية كشفه للأهداف الطائرة وغيرها هي أبسط بكثير من عملية المشي البسيطة . ففي عملية المشي تستخدم مئات العضلات وملايين الخلايا في عملية عضوية عالية التعقيد يصعب أو يستحيل وصفها بأي أداة رياضية مهما كانت معاصرة.

ولكن ولحسن الحظ فإن السمك والطير ونحن ، نتحرك و نأكل ونشرب ونحب المقربين من حولنا دون اللجوء إلى أي نموذج رياضي ، حيث يتبين من خلال ذلك أن حركة الكائن الحي خاضعة لعملية ترشيد اقتصادي دقيق ، وقد حاول ديكارت توصيف مثل هذه الحركات (مثل رد الفعل عند الألم) في نموذج معين ولكن النتائج كانت ساذجة. وما نقوم به نحن ، من نشاط ، ما هو إلا تقليد بسيط لنماذج الحركة العضوية عند الكائنات الحية.

من ذلك نرى أن اختيار النموذج لوصف ظاهرة ما ليس دائماً بالأمر السهل فالطبيعة المحيطة بنا متداخلة جداً، والبنية المعقدة التركيب لعالم الواقع توجب علينا اختصارات متتالية للوصول إلى نموذج بسيط نسبياً في وصف الظاهرة. ولكن من المؤكد أن ثمن سهولة الحسابات وفق نموذج بسيط سوف يدفع بقلة الدقة في العلاقات الناتجة.

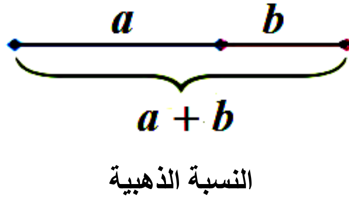
وأخيراً لمن يسأل : ما علاقة مادة مجردة كالرياضيات بعالم الواقع؟ نقول : إن الجواب يكمن في التجريد نفسه! ولم يعد هذا مفاجئاً إذا تذكرنا أن وصف ظاهرة ما يعني تجريدها وفق نموذج رياضي معين. ولكن ما هو مفاجئ أكثر أن النموذج الواحد قد يصلح لوصف ظواهر مختلفة! فظاهرة مرور تيار في دارة كهربائية تحتوي على مقاومة ومكثفة ، وحركة جسم تحت تأثير قوة مرنة توصفان بمعادلة رياضية واحدة تعرف بالمعادلة التفاضلية الخطية والمتجانسة من المرتبة الثانية. وهنا يكمن المعنى الأساسي للتجريد ، الذي يمكن أن يعد بحق أحد فنون الرياضيات!

بهذا نصل إلى نتيجة عامة مفادها أن النماذج الرياضية تمثل ضرورة ملحة في دراسة ظواهر الطبيعة بدءاً من من سقوط ورقة من على شجرة إلى طبيعة الكون بأكمله .

سألت سيدة مثقفة ذات اتجاه أدبي : هل يرى الرياضيون جمالاً في عملهم ؟ فقد سمعت أستاذ الرياضيات يوماً يشير إلى نظرية ما أنها جميلة ، وهي لم تتمتع بهذا الموضوع من قبل، وقد ظهرت لها هذه العبارة باطلة. وفي إطار الجواب عن هذا السؤال نذكر أولاً ببعض الفنون التي يتقارن الجمال فيها مع الجمال في الرياضيات ! فمن الواضح مثلاً أن النحت والعمارة والنقش وكل الفنون التشكيلية تتضمن اعتبارات هندسية. هذه الاعتبارات استخدمها المهندسون والفنانون ، شعورياً أو لا شعورياً ، بحيث توصلوا إلى تأثيرات الشعور بالجمال. ومن أهم هذه الاعتبارات في العهد القديم كانت الظاهرة التي تعرف بالنسبة الذهبية، وإحدى مسائل هذه النسبة هي : عندما ننشئ مستطيلاً (أو معبداً بشكل مستطيل) فما هو أفضل اختيار للنسبة بين الطول والعرض؟ لقد كان الجواب هو النسبة الذهبية والمستطيل الناتج هو المستطيل الذهبي . فما هي هذه النسبة ؟ ببساطة هي أن نسبة الكل إلى الجزء الأكبر هي كنسبة الجزء الأكبر إلى الجزء الباقي.

وبحل المعادلة الناتجة يتبين أن قيمة هذه النسبة هي:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61...$$



النسبة الذهبية

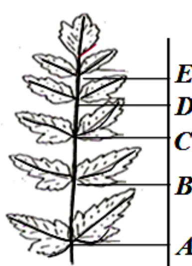
بالرغم من أصمية هذه النسبة فقد ظهرت في أماكن كثيرة في الطبيعة ولاقت رواجاً شديداً في أعمال الفنانين والنحاتين. من المعروف مثلا أن تمثال أبوللو الشهير تم بناؤه

على أساس هذه النسبة ، وكذلك النجمة الخماسية المنتظمة المعروفة بنجمة فيثاغورث تحتوي على هذه النسبة بين أضلاعها. وقد كانت هذه النجمة إحدى الأشكال المحببة للفيثاغورثيين ومثلت في الوقت نفسه شعاراً للجمعية الفيثاغورثية ، حتى أن بعض أعضائها كانوا يتبادلون التحية من خلالها عن طريق رسمها على الرمل.



نجمة فيثاغورث

ولهذه النجمة خواص كثيرة ومثيرة مما يجعلها تتميز عن غيرها بالتناسق والجمال. منها أن مجموع زواياها الرأسية يساوي ١٨٠ ، درجة الأمر الذي يذكر بمجموع زوايا المثلث ، وأن نقاط تقاطع الأقطار أو الأضلاع تقسمها بنسبة واحدة هي النسبة الذهبية.



شكل٣٥

وأخيراً وفي النبات يتبين أن الفروع والأغصان تبتعد عن بعضها بما يتناسب والنسبة الذهبية (شكل٣٥). وليس صدفة أن يكون الفنانون الكبار أمثال ليوناردو دافينشي ومايكل أنجلو ورفائيل قد شعروا بجاذبية عظيمة نحو الرياضيات من هذا المنظور.

ونذكر أخيراً في هذا الإطار (ورداً على تساؤل السيدة في بداية الفقرة) بقول أحد أقطاب الرياضيات وهو هنري بوانكاريه أحد العقول الكبيرة على مر العصور في الرياضيات: "لقد شعر المحترفون المهرة بسرور في الرياضيات مثل السرور الذي يمنحه النقش والموسيقى يعجبون بالتوافق الرقيق بين الأعداد والصيغ، ويندهشون إذا ما فتح لهم كشف جديد معاليق أمور لا يمكن رؤيتها منظوراً. هذا التمتع يمثل شعوراً بالجمال".

هذا وتعرض الرياضيات في طرق متعددة نفس عناصر الجمال التي اعترف بها عموماً كأساس للشعر وللموسيقى! لنلاحظ مثلاً أن الشاعر يرتب قصيدته على الصفحة في أبيات تجذب العين أولاً قبل أن تصل إلى الأذن والعقل. وكذلك يخطط الرياضي معادلاته وقوانينه لكي يمكن لصورها أن تؤدي التأثير الجمالي، حيث التناظر والتوافق. خذ مثلاً عرض بعض مجموعات القوانين في حساب المثلثات! بتمعن بسيط نلاحظ الشكل المدهش في الترتيب وفي التوافق بما قد يفوق القصيدة الشعرية! مثلاً

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

هذه المعادلات التي توصل إلى مثيلاتها العالم العربي ابن يونس الصفدي أوحت باختراع قصيدة اللوغاريتمات من قبل العالم نابير:

$$Ln(A\times B)=LnA+LnB$$
$$Ln(A\div B)=LnA-LnB$$

هذا التشابه بين الرياضيات والشعر في الشكل، يرافقه تشابه آخر، في المضمون، لا يقل أهمية عنه، وهو استخدام الرموز في كل منهما. فكلنا يعرف أن الحروف مثل x و y ليست ثابتة في الرياضيات، وإنما ترمز لمقادير مختلفة بحسب المسألة المطروحة. وكذلك الأمر بالنسبة للشعر الحديث! فهنا أيضاً الكلمات ليست ثابتة وإنما ترمز ، عادة ، لمعان متنوعة تختلف باختلاف مقاصد الشاعر. فكلمة الأرض مثلاً، قد ترمز لمعان مختلفة ! فهي مثلاً، الوطن بالنسبة للمهاجر والحقل بالنسبة للفلاح ، والكرة الأرضية بالنسبة للفلكي ... وهكذا ، وكذلك الأمر بالنسبة للزهرة التي قد ترمز للون أو للرائحة أو للبراءة

أو للزهرة نفسها. وهنا يمكن أن نجد أحد الفروق الأساسية بين الشعر الكلاسيكي (الجاهلي مثلاً) والشعر الحديث . فإذا كانت صعوبة الأول تكمن في تفسير معاني الكلمات غير المألوفة للناس ، فإن صعوبة الثاني تكمن في فك رموز الكلمات المألوفة ! وهذا ما يعبر عنه باللغة العامية " المعنى بقلب الشاعر" .

أما في الموسيقى فإن دور الرياضيات عزيز تماماً. فإذا كنا نرى جمال الشعر في الرياضيات فهنا يمكن رؤية الرياضيات في الجمال. فمنذ قرون قبل عصرنا لاحظ فيثاغورث ، ومن بعده إقليدس ، أنه إذا شدت أوتار موسيقية متساوية الطول بأثقال مناسبة للكسور ١/٢ و ٢/٣ و ٣/٤ فإنها تنتج مسافات موسيقية هي الثماني والخماسي والرباعي. وفي عصر النهضة ولدت الموسيقى الحديثة (التوافقية) فكان من بين من أضافوا إلى النظرية الجديدة رياضيون مثل كبلر وديكارت وغيرهما. وبالرغم من اتساع الفرق بين الرياضيات والموسيقى إلا إنهما مرتبطان برابط سري غامض يوفق بينهما. وقد قال لايبنيتز في هذا الصدد: " الموسيقى هي تمرين مختف في الحساب لعقل لا يشعر بالتداول مع الأعداد " . بذلك يكون حب الرياضيين للموسيقى حقيقة لا يمارى فيها.

فن التفكير ❺

تمثل الرياضيات طريقة للبحث فنية ومنطقية ، وحقلاً للتفكير الأصيل يعتمد كما الأدب على قوة البديهة وسعة الخيال، وهي تنشد الجمال وتتمتع بقدر كبير منه. وللحصول على بعض الرياضيات لا بد من شيء من التفكير ! والتفكير هو حق الرجل المتحضر الذي لا ينازع فيه. فالرجل البدائي يفكر وكذلك بعض الحيوانات! ولكن المسألة هي درجة التفكير!. فالحشرة مثلاً تحاول الفرار من النافذة المغلقة مرات ومرات دون أن تحاول ذلك من نافذة أخرى بجوارها سبق وأن دخلت منها إلى الغرفة. أما الفأر فهو يتصرف تصرفاً أذكى! فإذا وقع في شرك فإنه يحاول أن يقلص نفسه كي يتملص من بين قضيبين

فإذا أخفق جرى إلى قضيبين آخرين وهكذا .أما الإنسان فهو قادر على تنويع محاولاته تنويعاً أشد ذكاءً تترافق فيه التجربة مع التعلم من أخطائه وفشله وذلك من خلال التفكير. لنذكر مثلاً باللغز المعروف والمدهش الخاص بالفلاح والذئب والحشيش والعنزة، الذي تجري قصته كما يلي:

على الفلاح أن ينقل العناصر الثلاثة إلى الشاطئ الآخر من النهر وكان زورقه صغيراً لا يتسع لأكثر من اثنين :هو وعنصر آخر فقط . فكيف للفلاح أن ينجز هذه المهمة دون أن تحدث خسارة في نقلها؟وكانت العنزة أكثر المسافرين إقلاقاً للفلاح! فإذا بدأ بالحشيش فسوف يلتهم الذئب الخروف وإذا بدأ بالحشيش فسوف يأكل الخروف الحشيش فما العمل؟ أعتقد أن الحل معروف لمعظم الناس وربما حل الفلاح هذه المشكلة عن طريق التجريب. أما المرء الذي يميل إلى التفكير فإنه يحل هذا اللغز بأن يتخيل خطة الحل.

وهناك ألغاز مشابهة للغز السابق مثل لغز الزوجين الغيورين اللذين يريدان عبور النهر مع زوجتيهما في قارب لا يتسع لأكثر من اثنين أو لغز الأزواج الثلاثة والزوج الثالث غيور(تارتاليا)، حيث يكون الأمر أكثر تعقيداً ... وهكذا.

ولكن المسألة هي كيف يستطيع المرء أن يحسن قدرته على التفكير؟ هذه المسألة هي مسألة تربوية. إن أي مدرس يعرف من تجاربه بأن بعض تلاميذه يفكرون بطريقة طبيعية وعفوية كما يتجه البط نحو الماء! في حين يحدث العكس بالنسبة للآخرين ، حيث يتبين أن هناك اتجاهاً تلقائياً للعقل نحو الكسل والهروب من التفكير. لذلك لا نستغرب إذا عرفنا أن مثل هذه المسائل أول ما جذبت انتباه الرياضيين.

الفن والتخيل ❻

يرى بعض الرياضيين ومنهم الرياضي الكبير سلفستر (J. Silvester) أن للرياضيات مكاناً محدداً بين الفنون الجميلة لأنها تعطي صورة هندسية للعلاقات المتبادلة بين الفنون الجميلة،ويقول: يبدو لي أن كل الفنون الجميلة عبارة عن محطة لها أربعة مراكز، ويمكن

أن تمثل بهرم منتظم (رباعي وجوه) رؤوسه الفنون الأربعة وهي الشعر والموسيقى والنحت والرياضيات. فنلاحظ وجود مستو مشترك لكل ثلاثة منها ومحور مشترك بين كل اثنين منها يقابله محور يمر بين الاثنين الآخرين. وبهذه الطريقة يمكن أن نقوم بالعرض. لاحظ مثلاً أن المستقيمات الواصلة بين مراكز ثقل الوجوه والرؤوس المقابلة تلتقي في نقطة واحدة يمكن اعتبارها مركز ثقل الفنون الجميلة جميعاً. ماذا يمثل هذا المركز ؟ أو ماذا يجب أن يكون؟ يقول سلفستر: ليس لدي من الوقت ما يسمح بأن أفكر في ذلك!

ولكن بعد ما تقدم إذا أرادت الرياضيات أن تكون فناً فيجب عليها أن تبين بطريقة موضوعية أنها تمتلك بعض العناصر التي تجعل الأشياء جميلة. فما هو العنصر الأكثر أساساً في هذا الفن؟ إنه التخيل ! التخيل الخلاق! فلو أخذنا على سبيل المثال الدائرة، وهي بالنسبة لرجل الشارع حافة عجلة وربما كان لها عوارض . ماذا فعلت الهندسة؟ لقد زخمت الهندسة الأولية هذا الشكل البسيط بأنصاف الأقطار والأوتار والقطاعات والمماسات والمضلعات المرسومة داخلها وخارجها والنسبة السامية بين المحيط ونصف القطر. وقد طار الخيال إلى أبعد من ذلك! إذ لف حول الدائرة كل المستقيمات وكل النقط في المستوي من خلال النظرية التخيلية للأقطاب، وإذا بنا أمام بناء هندسي متكامل خلق من ابتداء فج. ولم يكتف بذلك فإذا به يكتشف بمجهود أكبر النقطتين الدائريتين في اللانهاية، وهذا برهان لا يمكن إنكاره مع أنه لم يقدر لعين على قيد الحياة أن ترى هاتين النقطتين في الحاضر أو المستقبل. ولم يقف الرياضي عند حد بل تابع اللعب بهذا الابتكار الجديد بنفس الطريق ونفس الذوق. وتذكر من فضلك أن كل ذلك ما هو إلا مجرد هندسة مستوية أولية.

لنأخذ مثالاً آخر يبدوفيه واضحاً فن التخيل من خلال السؤال:هل يوجد أكبرعدد وما هو؟ إذا راقبت طفلاً ذكياً يجرب آلية تسمية الأعداد فإنه يعد:١، ٢، ... وبعد أن يصل إلى ١٠٠ يكرر التجربة فيصل إلى ٢٠٠ ثم ٣٠٠وهكذا.ولن يستريح الطفل فهو بمساعدة قليلة،

أو بدون مساعدة ، سيجد نفسه مندفعاً نحو أعداد أكبر وأكبر ... ولو وصل إلى مليون تريليون فسيثار السؤال الذي لا مفر منه: أين نقف وأين النهاية؟ وسيصل في سن مبكرة إلى أنه لا يوجد عدد أكبر، وأن متتالية الأعداد الطبيعية ليس لها نهاية. هذه الفكرة التي ظهرت أنه في مقدور الطفل تحملها حيرت العقول الكبيرة على مر العصور!! فوراء هذا المظهر البسيط يتخفى خداع كبير وألاعيب كثيرة لا يمكن التخلص بسهولة منها. هنا تسقط معظم القوانين والعمليات الحسابية التي نعرفها وتسقط معظم البديهيات مثل: الجزء أصغر من الكل ، حيث يتبين مثلاً أن مجموعة الأعداد الزوجية ليست أقل من مجموعة جميع الأعداد الطبيعية . وبهذا نكون قد اقتربنا من مفهوم اللانهاية الذي ينقلنا إلى عالم جديد وغريب هو عالم اللانهايات .عالم لا يمكن ملاحظته أو تصوره . ولكن لحسن الحظ وبملكيتنا لشيء من فن التفكير والتخيل نستطيع التعرف عليه جزئياً وذلك من خلال ابتكار قواعد مبنية على الاستنتاجات العقلية والمنطقية. ولكن هنا يجب أن ننتبه إلى أن العقل ، الذي نعتز به ، يمكن أن يخدعنا. ولنتذكر خديعة المسلمة الخامسة التي دامت أكثر من ٢٠٠٠ سنة . فقد تبين بعد هذه الفترة الطويلة أن محاولة إثبات أو بطلان هذه المقولة ليست ذات معنى، ولكن مقابل ذلك تم الحصول على نتائج رائعة كثيرة لم تكن في الحسبان وتبين أن خلف هيكلها يتخفى ما يعرف اليوم بالهندسات غير الإقليدية وأصبح لزاماً علينا تخيل وجود فضاءات أخرى مرتبطة بهذه الهندسات الجديدة.

حرب وسلام ❼

لقد كانت علاقة الرياضيات وثيقة في أي عصر من العصور بحاجات ذلك العصر الاجتماعية والاقتصادية ، بحيث غدت أداة هامة في الحياة اليومية للجنس البشري منذ فجر التاريخ . لقد كانت فكرة العد يوماً ما غريبة على الجنس البشري بالتأكيد. ونحن لا نعرف أين ومتى ظهر هذا النابغة الذي كان أول من سأل السؤال: كم؟ وربما قصد عدد

الخراف! فكان لابد من ظهور نابغة آخر بعده يسأل السؤال: ما مقدار؟ الذي سيعني كمية الصوف! فبدءاً من السؤال كم (العدد) إلى السؤال ما مقدار (الكمية) انتقل إلى المساحة (الهندسة) ثم إلى الرحلات البحرية (السفينة ، الخريطة ، الساعة ، المدفع ، القذيفة) فإلى الطيران (الهندسة الفراغية) فإلى الوراثة (علم الأحياء وعلم الاحتمالات).

في النصف الأول من القرن الماضي نشبت حربان كبيرتان جندت لهما الدول كل قواها وإمكاناتها وعقولها من أجل النصر، وكان سباقاً لم يعرف التاريخ له مثيل! سباق حياة أو موت ! فمن يصل إلى السلاح الفتاك أولاً فهو الغالب! ولم يكن ميدان المعركة هو ساحات القتال وحدها، بل كانت حامية الوطيس في معامل العلماء أيضاً ، وكانت حرب ضروس بين الأقلام ، على ساحات من الورق ، وكان النصر الحاسم مديناً للسبق العلمي وللسبق الرياضي .

وإذا كان العلم ، متمثلاً بالرياضيات، مكن الإنسان من فهم ظواهر الطبيعة، بدءاً من عصر النور، حيث مكنت مبادئه الإنسان من العيش بسلام ، مع وحوش الغابة ومد المحيطات والبرق والرعد، فإنها لم تعد تحمل له الطمأنينة في عصر الصواريخ الجبارة والحاسبات الالكترونية والمسرعات النووية والجمرة الخبيثة. فهاهو الإنسان يعيش مرة أخرى في عالم من السحر والخوف! عالم صنعه بيديه ثم غدا يتلمس طريقه بين الكائنات الميكانيكية التي تقضي تدريجياً (أو بسرعة) على وجوده.

ما يحدث اليوم في بلداننا ،على شواطئ البحر الأبيض المتوسط ، لخير مثال على ذلك. ومن سخرية القدر أن يتطابق ذلك مع بعض ما جاء في رواية ميكروميغاس(عام ١٧٣٠) للفيلسوف فولتير: انحنى ساكن كلب الجبار إلى الأمام كسحابة مظلمة قائلاً لهم: أنتم ياصغار الأذكياء ، يامن أحب الله أن يوضح فيكم علمه وقوته ، لا شك أن حياتكم ، علىهذه الأرض نقية ورائعة بتجردكم عن المادة . لذلك ينبغي أن تمضوا حياتكم بالسعادة والسرور والفكر والتأمل ، وإذا وجدت السعادة الحقيقية أصلاً فإنها تسكن هنا حتماً.

أجابه أحد الفلاسفة من على ظهر السفينة: لدينا الكثير من المادة ونرتكب الكثير من الأذى... ويجب أن تعرف أن هناك عشرة آلاف من بني جنسنا يلبسون العمائم يذبحون عدداً مماثلاً من مخلوقات يلبسون القبعات أو على الأقل يقتلون ويُقتلون . " كفار جاحدون" صاح العملاق من سكان كلب الجبار" أفكر بإن أخطو خطوتين أوثلاث وأسحق هؤلاء القتلة تحت قدمي" . " لاتتزعج نفسك" أجاب الفيلسوف فهم جادون تماماً في سحق أنفسهم . بالإضافة إلى أن العقاب يجب ألا ينزل بهم بل بالمتوحشين القعدة الكسالى الذين يصدرون الأوامر من قصورهم بقتل الملايين من الناس ، وبعدئذ يشكرون الله على نجاحهم.

من المؤسف القول إن إيديولوجيا الشر تحتاج (على ما يبدو) إلى إدوات بسيطة وافكار سهلة ، لتفعل فعلها في الدوافع العدوانية الدفينة عند بعض بني البشر(المتميزين بسرعة تكوين آرائهم واعتبارها أموراً مطلقة لاجدال فيها) ، لتظهر بعدئذ وبسرعة فائقة عند وجود البيئة والزمان المناسبين، ولتدمر ما بنته إيديولوجيا الخيرعبرعمليتها التراكمية ، من النشاط العلمي والأدبي والثقافي، التي احتاجت سنوات طويلة لبلورتها في المجتمعات.

نحتاج اليوم إلى إيديولوجيا جديدة مناسبة وإطلالة عصر جديد من النور يستطيع فيه الإنسان أن يعيش مع أخيه الإنسان بسلام وأن يحسن استخدام اختراعاته واكتشافاته لتحمل إليه الغنى والمتعة بدلاً من الدموع والآلام .علينا اليوم أن نحاول غرس الروح العلمية عند شبابنا ، وحاجتنا إلى ذلك كتب جذابة ومواقع علمية مقنعة تحمل العلم إلى الطلاب والجماهير التي لا ينقصها الذكاء ولكن يعوذها الزاد العلمي الكافي الذي يوصل هذا العلم . فقد أصبح العلم ، وخصوصاً الرياضيات، أداة ضرورية وملحة في معركة تنازع البقاء للأصلح ولم يعد إهمالها أو النفور منها مجرد دعابة بريئة بل صار كرهاً لروح العلم كله ، إذا اتخذ شكلاً جماعياً عاماً فهو نذير تقهقر في مؤخرة ركب يغذ بالسير.

مما تقدم نجد أن مجال الرياضيات واسع جداً بحيث يصعب إيجاد المجال الذي لا تجد فيه الرياضيات مدخلاً وقد أصبح من الصعب أن تلاقي تعريفاً معبراً عنها . وربما أفضل ما نقول هو أن "الرياضيات هي كل ما يقوم به الرياضيون".

قد يسأل سائل ما هي مصلحة الرياضيين وغيرهم من الباحثين في صرف كل هذا الوقت والجهد للإكتشاف وخصوصاً أننا نعرف ، تاريخياً ، أن المبتكر هو آخر من يستفيد من ابتكاره بدءاً من لمبة أديسون وانتهاء بالخلوي (الموبايل) ؟ ويمكن الذهاب أبعد من ذلك لنسأل: ما هي الحاجة الفعلية لكثير من الإجابات وخصوصاً عن المسائل المشابهة لمسائل عبور النهر والمسائل المتعلقة بالوزن والمسافات ومسائل الأعداد وغيرها ؟ وما هي الفائدة من الأعداد المثالية أو المتحابة مثلاً؟ وهل الأعداد المثالية أو المتحابة المكتشفة مؤخراً ستلعب دوراً كبيراً في حياة البشر؟ وإذا لم تكن لها أي فائدة فلماذا نضيع ما بذلته الحواسيب العجيبة على مثل عدم النفع هذا؟ قد تكون الإجابة لأنها مسلية ولأن لغز الأعداد المتحابة ما هو إلا تحد نريد أن نتصدى له ونشعر بالمتعة عند التوصل للحل!! ومعظم الرياضيات يصب في نفس القارب.

وقد شيد الإنسان البناء ، الذي هو الرياضيات ، كبرهان على أن الإنسان لا يمكن أن يعيش على الخبز وحده . فهو محب للاستطلاع ويدفع ثمناً غالياً من الوقت والجهد لكي يجد إجابة عما يصدم خياله ويختبر قوته الاختراعية ويظهرها قبل الآخرين ! قبل الذين يمكنهم أن ينفعلوا نحوها كما انفعل هو. وربما هذا أحسن ما يمكن أن يقال في الدفاع عن العلم وعن الرياضيات . وإذا وجد من لم يقتنع بهذه الحجة فلنذكره بالتساؤل التالي:

ما الفائدة من لعبة كرة القدم التي تتحمس لها الجماهير على وجه البسيطة كلها ؟ وماذا قدمت هذه اللعبة للبشرية بمقابل تلك المبالغ الطائلة المرصودة لها والتي تفوق كل تصور؟؟ أترك الجواب كتساؤل أخير لكم!

بعض المراجع

[1] Anglin W. S. Mathematics :A Concise History and Philosophy, springer, (1991).

[2] Berggren Lennart, The Mathematics of Medical Islam. (2003)

[3] Boyer Carl, A history of Mathematics, John Wiley & Sons1968.

[4] Brannan D. Esplen M, Gray J. Geometry. Cambridge University Press (1999)

[5] Clagett M. Greek Senesce in Antiquity. New York : Abelard 1955.

[6] Dreyer J. A History of Astronomy from Thales to Kepler . New York : Dover Publication,1953.

[7] Durant Will, The Story of Philosophy from Plato to Dewey. (1973).

[8] Edwards C.H, The Historical Development of the Calculus. Springer-Verlag, N. Y. (1979).

[9] Ferreirod Jose, Labyrinth of Thoughts. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics. Published 2007.

[10] Gilling Richard, Mathematics in the Time of Faraons. New York : Dover 1972.

[11] Hall A. From Galileo to New 1630-1720 London : Collind 1963.

[12] Heath Sir Thomas, A history of Greek Mathematics From Thales to Euclid. Volume1, 1989.

[13] Howard Eve, An Introduction to the History of Mathematics. New York 1983.

[14] Khayyam Omar , The Algebra of Omar Khayyam . Ed D. S. Kasir, New York ,AMS Press, 1972.

[15] Khwarizmi M. The Algebra. Trans. Frederic Rosen , London 1831.

[16] Kitcher Sir J, The Nature of Mathematical Knowledge. Oxford University Press 1983 .

[17] Kline Morris, Mathematics and The Search for Knowledge. Oxford University Press 1985.

[18] Kline Morris, Mathematical Thought From Ancient to Modern Times. Oxford University Press 1972

[19] Livio Mario, The Golden Ratio. Published 2003

[20] Margenau Henry, Mathematics . Yale University (1969)

[21] Poincare H. The Foundation of Science. Lancaster, Science Press,1946.

[23] Poincare H. The Philosophy of Mathematics and Natural Science, Prendeton University Press 1849.

[24] Posamentier Alfred, The Pythagorean Theorem, Stoey of its Power and Beauty. (1995).

[25] Robson Eleanor, Babylonian Mathematics. University of Cambridge1999.

[26] Russell B. A History of Western Philosophy. New York: Simon & Schuster 1945.

[27] Russell B. Our Knowledge of The External World. New York : The New American Library, 1956.

[28] Struik Dirk Jan, A Concise History of Mathematics. (1987).

[29]Varafarajan V. S. Algebra in Ancient and Modern Timed. Published 1998.



الدكتور حسن بدور

أستاذ في قسم الرياضيات

كلية العلوم- جامعة تشرين

مدرس "تاريخ الرياضيات"

هذا الكتاب: أجمل العلوم هي علوم التاريخ وأجمل علوم التاريخ هو تاريخ الرياضيات ، فقد حمل هذا العلم الكثير من الجدية والصعوبة وحمل أيضاً الكثير من المتعة والتسلية فما من تطور للنشاط البشري أو تقدم للحضارة الإنسانية ، عبر التاريخ ، إلا وكان له مرور عبر الرياضيات يمثل هذا الكتاب ملخصاً لتاريخ الرياضيات يسلط فيه الضوء على علاقة الرياضيات بالتطور الحضاري والفلسفي للمجتمعات البشرية، منذ القدم وحتى الوقت الحاضر، وذلك من خلال المرور على الشخصيات الشهيرة، من الرياضيين والفلاسفة ، وانجازاتها عبر التاريخ. ولسوف يلاحظ المرء الجهد الكبير الذي بذلوه والصعوبات المريرة التي عانوها في سبيل الوصول إلى بعض الحقائق العلمية والرياضية، التي نراها اليوم من البديهيات. فنصل إلى الحقيقة المدهشة: أن ما نتعلمه اليوم ونفهمه في ساعات لزمهم للتوصل إليه، آلاف من السنوات.

هذا الكتاب مفيد لكل من يهتم بالرياضيات والفلسفة والتاريخ



دار المرساة للطباعة والنشر والتوزيع

سورية - اللاذقية 0944294944